Mikroprimstellen für p-adische Zahlkörper

– der zweite Zentralschritt

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin

von
Herrn Diplom-Mathematiker Ernst Ludwig Wirl

Präsident der der Humboldt-Universität zu Berlin:
Herr Prof. Dr. Dr. h. c. Christoph Markschies

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II:
Herr Prof. Dr. Peter Frensch

Gutachter:
(i) Prof. Dr. E.-W. Zink
(ii) Prof. Dr. P. Schneider
(iii) Prof. Dr. E. Große-Klönne

eingereicht am: 13. Juli 2010
Tag der mündlichen Prüfung: 23. November 2010

Abstract

Micro primes were introduced by J. Neukirch in the context of abstract class field theory. A generalization of decomposition groups of primes of global fields led him to a purely group theoretical definition of micro primes as certain equivalence classes of Frobenius elements. Applied to the case of Galois groups of local or global fields this theory yields a description of special conjugacy classes. The main problem already posed by J. Neukirch is to understand the number theoretical meaning of micro primes, that is to describe them in terms of the base field.

J. Mehlig and E.-W. Zink established a bijection between micro primes and norm compatible sequences of prime elements in field towers. These towers arise as fixed point fields for the sequence of derived subgroups of the inertia group. So one has to study micro primes for the corresponding factor groups of the absolute Galois group and then to form a projective limit. In the first step, a bijection between relative micro primes and conjugacy classes of prime elements has been obtained.

The main result of this project is a complete answer to the problem of J. Neukirch for the second step.

One has to introduce norm maps between Lubin-Tate power series of different height and the projective limit has to be taken with respect to these norm maps. For this purpose results from class field theory are transferred to an "almost abelian" case. In the end micro primes can be described as Galois orbits of norm compatible sequences of normic Lubin-Tate power series.

The coefficients of all the Lubin-Tate power series are in finite unramified extensions of the base field. Therefore one can define a field of coefficients for a given norm compatible sequence of normic Lubin-Tate power series. The degree of that field respectively the length of the Galois orbit is at the same time the degree of the corresponding micro prime.

Zusammenfassung

Mikroprimstellen wurden eingeführt von J. Neukirch im Rahmen der abstrakten Klassenkörpertheorie. Eine Verallgemeinerung der Zerlegungsgruppen von Primstellen globaler Körper motivierte die rein gruppentheoretische Definition der Mikroprimstellen als gewisse Äquivalenzklassen von Frobeniuselementen. Auf den Fall der Galoisgruppen lokaler oder globaler Körper angewendet, ergibt diese Theorie eine Beschreibung spezieller Konjugationsklassen. Die Hauptaufgabe von J. Neukirch ist, die zahlentheoretische Bedeutung der Mikroprimstellen zu verstehen, das heißt, sie in Termen des Grundkörpers anzugeben.

J. Mehlig und E.-W. Zink fanden eine Bijektion zwischen Mikroprimstellen und normverträglichen Folgen von Primelementen in Körpertürmen. Diese Türme entstehen durch die Fixkörper der abgeleiteten Untergruppen der Trägheitsgruppe. Auf diese Weise betrachtet man Mikroprimstellen für die entsprechenden Faktorgruppen der absoluten Galoisgruppe, um dann einen projektive Limes zu bilden. Im ersten Schritt ist eine Bijektion zwischen relativen Mikroprimstellen und Konjugationsklassen von Primelementen gezeigt worden.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist eine vollständige Antwort auf die Frage von J. Neukirch im zweiten Schritt.

Es wird eine Normabbildung für Lubin-Tate-Potenzreihen verschiedener Höhe angegeben und der projektive Limes bezüglich dieser Normabbildungen gebildet. Dazu werden Ergebnisse der Klassenkörpertheorie auf einen "fastabelschen" Fall übertragen. Schließlich können die Mikroprimstellen als Galoisorbits von normverträglichen Abfolgen normischer Lubin-Tate-Potenzreihen beschrieben werden.

Die Koeffizienten aller dieser Lubin-Tate-Potenzreihen sind in einer endlichen unverzweigten Erweiterung des Grundkörpers. Also kann man zu einer gegebenen normverträglichen Abfolge normischer Lubin-Tate-Potenzreihen den Koeffizientenkörper definieren. Der Grad dieses Körpers bzw. die Länge des Galoisorbits entspricht dem Grad der zugehörigen Mikroprimstelle.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegendes über Mikroprimstellen **1**
1.1 Formale Galoistheorie . . . 1
1.2 Frobeniuselemente und Frobeniuskörper . . . 1
1.3 Mikroprimstellen . . . 3
1.4 Der lokal unverzweigte Fall . . . 8

2 Konjugationsklassen in der Galois- und der Weilgruppe **13**

3 Weiterführendes zu Mikroprimstellen **17**
3.1 Aus der Klassenkörpertheorie . . . 17
3.2 Markierungen . . . 19
3.3 Die Körper $K^{n*}|K$ . . . 21
3.4 Iterative Beschreibung durch Markierungen . . . 23
3.5 Aus der Normenkörpertheorie . . . 24
3.6 Aus der Lubin-Tate-Theorie . . . 26
3.7 Beschreibung von Fasern im Fall $n = 1$ . . . 30
3.8 Normische Lubin-Tate-Potenzreihen, ein Projektor . . . 37

4 Die Faser $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$ **39**
4.1 Die Äquivalenzrelation in der Faser . . . 39
4.2 Verträglichkeit normischer Sequenzen für $f|f'$ . . . 42
4.3 Diskrete Mikroprimstellen und Grundkörpererhöhung . . . 44
4.4 Eine Approximation der Faser $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$ . . . 47
4.5 Laubies Thetaabbildungen . . . 52

5 Colemantheorie im K_0**-Fall** **57**
5.1 Komplemente von K^f in K^f_π . . . 58
5.2 Die Colemantheorie im K_0-Fall . . . 63
5.3 Der durch Colemanpotenzreihen vermittelte Isomorphismus . . . 72
5.4 Thetaabbildung und Colemantheorie . . . 74

6 Eine Beschreibung der Faser mittels Lubin-Tate-Potenzreihen **77**
6.1 Galoisoperation auf Primelementen des Normenkörpers . . . 78
6.2 Eine kanonische Verträglichkeitsabbildung . . . 81
6.3 Mikroprimstellen vom Grad 1 . . . 83
6.4 Verbindung zum Subquotienten $\mathbb{S}_1$ . . . 85
6.5 Mikroprimstellen höheren Grades . . . 87
6.6 Verbindung zu den Mehlig-Zink-Subquotienten . . . 91
6.7 Ein Modell der Faser . . . 94

Sachverzeichnis **97**

Literaturverzeichnis **98**

1 Grundlegendes über Mikroprimstellen

In diesem Kapitel wird die Idee der Mikroprimstellen dargestellt. Die Grundlage ist der Artikel [Neu94] "Micro primes" von Jürgen Neukirch mit einigen Ergänzungen aus dem Artikel [MZ05], der in Kapitel 3 Hauptthema ist.

1.1 Formale Galoistheorie

Sei $d : G \to \hat{\mathbb{Z}}$ ein stetiger surjektiver Homomorphismus proendlicher Gruppen. Dann kann G formal als Galoisgruppe aufgefasst werden. Dazu sei jeder abgeschlossenen Untergruppe G_K von G der Index K als Fixkörper zugeordnet. Als Grundkörper k sei der Index der Gruppe $G_k := G$ selbst bezeichnet. Die Inklusion $G_L \subseteq G_K$ zweier abgeschlossener Untergruppen von G_k werde als Körpererweiterung $L|K$ gedeutet. Zur minimalen Untergruppe $\{1_G\}$ gehöre der maximale Erweiterungskörper von k, er sei mit $\bar{k}$ bezeichnet. Die Untergruppe $\ker(d) =: I$ gehe einher mit der maximal unverzweigten Körpererweiterung k^{nr} von k, entsprechend führt $\ker(d|_{G_K}) = I \cap G_K =: I_K$ auf den Körper K^{nr}.
Für eine Körpererweiterung $L|K$ sei der Körpererweiterungsgrad $[L : K]$ durch den Gruppenindex $[G_K : G_L]$ gegeben. Ferner sei $f_{L|K} := (d(G_K) : d(G_L))$ der formale Trägheitsindex, insbesondere $f_K := f_{K|k} = (d(G_k) : d(G_K)) = (\hat{\mathbb{Z}} : d(G_K))$. Falls letzterer endlich ist, werde K kurz f-endlicher Körper genannt. In diesem Fall findet sich die Ausgangslage für $d_K := \frac{1}{f_K} d : G_K \to \hat{\mathbb{Z}}$ wieder.
Ist $G_L \subseteq G_K$ normal, dann werde auch $L|K$ normal genannt und dieser Erweiterung die Gruppe $G(L|K) := G_K/G_L$ zugeordnet. Auf diesem Quotienten induziert d_K einen Homomorphismus, der weiterhin d_K heißen soll. Die Ausgangslage findet sich für dieses d_K wieder, falls $L \supseteq K^{\mathrm{nr}}$.

1.2 Frobeniuselemente und Frobeniuskörper

<u>1.1 Definition:</u> Ein Element $\varphi \in G$ heißt **Frobeniuselement**, falls $d(\varphi) \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Die Menge $d^{-1}(\mathbb{N})$ der Frobeniuselemente in $G(\bar{k}|k) = G_k = G$ sei mit $\mathrm{frob}(k)$ bezeichnet.
Wegen $0 \notin \mathbb{N}$ ist $\mathrm{frob}(k)$ eine Halbgruppe: Wohldefinierte Operation: $d(\varphi\psi) = d(\varphi) + d(\psi) \in \mathbb{N}$ für $d(\varphi)$, $d(\psi) \in \mathbb{N}$; Assoziativität: von G_k; kein neutrales Element: $d(1_G) = 0$; keine Inversen: $d(\varphi^{-1}) = -d(\varphi) < 0$ für $d(\varphi) \in \mathbb{N}$.
Für eine abgeschlossene Untergruppe G_K sei $\mathrm{frob}(K) := \mathrm{frob}(k) \cap G_K = \{\varphi \in G_K \mid d(\varphi) \in \mathbb{N}\}$.
Für einen f-endlichen Körper K gilt $\mathrm{frob}(K) = \{\varphi \in G_K \mid d_K(\varphi) \in \mathbb{N}\} = d_K^{-1}(\mathbb{N})$: Für $\varphi \in G_K$ ist $d(\varphi) \in f_K\hat{\mathbb{Z}}$, für $\varphi \in \mathrm{frob}(K)$ ist also $d(\varphi) \in f_K\hat{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{N} = f_K\mathbb{N}$, damit $f_K^{-1} d(\varphi) \in \mathbb{N}$. Gilt andererseits $d_K(\varphi) \in \mathbb{N}$, dann erst recht $f_K d_K(\varphi) = d(\varphi) \in \mathbb{N}$. Es ist also egal, ob man d oder d_K zur Definition von $\mathrm{frob}(K)$ benutzt.

Für eine normale, K^{nr} umfassende Erweiterung $L|K$ sei $\mathrm{frob}(L|K) := \{\varphi \in G(L|K) \mid d_K(\varphi) \in \mathbb{N}\}$ die Menge der **relativen Frobeniuselemente**. Man kann sie als (absolute) Frobeniuselemente der Gruppe $G(L|K)$ auffassen.
Ist K f-endlich, so ist $\mathrm{frob}(K)$ dicht in G_K, ansonsten ist $\mathrm{frob}(K) = \emptyset$. Insbesondere ist also $\mathrm{frob}(k)$ dicht in G.

1.2 Definition: Ein Körper $\mathcal{F}$ heißt **Frobeniuskörper**, falls

(i) $\mathcal{F}k^{\mathrm{nr}} = \bar{k}$, das heißt, $\mathcal{F}$ besitzt nur noch unverzweigte Erweiterungen,

(ii) $f_{\mathcal{F}}$ ist endlich.

Die Menge dieser (absoluten) Frobeniuskörper sei mit $\mathrm{frob}'(k)$ bezeichnet. Falls $K|k$ endlich, $L|K$ normal und $L \supseteq K^{\mathrm{nr}}$, hat man entsprechend relative Frobeniuskörper:

1.3 Definition: Ein Körper $\mathcal{F}$ mit $L|\mathcal{F}|K$ heißt **(relativer) Frobeniuskörper** über K innerhalb L, falls

(i) $\mathcal{F}K^{\mathrm{nr}} = L$, das heißt, $\mathcal{F}$ besitzt innerhalb von L nur noch unverzweigte Erweiterungen,

(ii) $f_{\mathcal{F}|K}$ ist endlich.

Die Menge der Frobeniuskörper über K innerhalb L sei mit $\mathrm{frob}'(L|K)$ bezeichnet. Im Fall $K = k$ und $L = \bar{k}$ sind das die (absoluten) Frobeniuskörper im eigentlichen Sinn. Die betrachteten relativen Frobeniuskörper sind andererseits absolute Frobeniuskörper bezogen auf die Gruppe $G(L|K)$. Zunächst werden also ohne Einschränkung absolute Frobeniuskörper bzw. -elemente betrachtet.

1.4 Hilfssatz ([Neu94] Lemma 2.4): Sei $\varphi \in \mathrm{frob}(k)$ und $\langle\varphi\rangle$ die von φ topologisch erzeugte Gruppe. Dann induziert die Einschränkung von $d : G \to \hat{\mathbb{Z}}$ einen Isomorphismus $d : \langle\varphi\rangle \to d(\varphi)\hat{\mathbb{Z}}$. Für $\varphi, \varphi' \in \mathrm{frob}(k)$ mit $\langle\varphi\rangle = \langle\varphi'\rangle$ folgt $\varphi = \varphi'$.
Beweis: Weil $\hat{\mathbb{Z}}$ also $\mathbb{Z}$-Modul torsionsfrei ist, ist das Bild $d(\langle\varphi\rangle) = d(\varphi)\hat{\mathbb{Z}}$ der prozyklischen Gruppe $\langle\varphi\rangle$ isomorph zu $\hat{\mathbb{Z}}$. Die Gesamtsurjektion muss bereits bijektiv sein, insbesondere wird dabei $d : \langle\varphi\rangle \to d(\varphi)\hat{\mathbb{Z}}$ zum Isomorphismus. Deshalb folgt für $\langle\varphi\rangle = \langle\varphi'\rangle$, das heißt, $d(\varphi)\hat{\mathbb{Z}} = d(\varphi')\hat{\mathbb{Z}}$, also $d(\varphi) = d(\varphi')$, bereits $\varphi = \varphi'$. $\square$.

1.5 Hilfssatz ([MZ05] in Definition 1.1): Es gibt eine Bijektion zwischen Frobeniuselementen und Frobeniuskörpern:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{frob}(k) & \leftrightarrow & \mathrm{frob}'(k) \\ \varphi & \mapsto & \mathcal{F}_\varphi := \bar{k}_\varphi \\ \varphi_F & \leftarrow\!\shortmid & \mathcal{F} \end{array}$$

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ ein Frobeniuskörper. Dann ist $\mathcal{F}^{\mathrm{nr}} = \bar{k}$. Wegen $f_{\mathcal{F}} < \infty$ gibt es die Abbildung

$$d_{\mathcal{F}} = \frac{1}{f_{\mathcal{F}}} d : G_{\mathcal{F}} := G(\bar{k}|\mathcal{F}) = G(\mathcal{F}^{\mathrm{nr}}|\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}.$$

Dem Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ wird dasjenige Element $\varphi_\mathcal{F}$ zugeordnet, das von $d_\mathcal{F}$ auf 1 abgebildet wird. Dieses ist ein Frobeniuselement, da $d(\varphi_\mathcal{F}) = f_\mathcal{F} \in \mathbb{N}$, und es erzeugt die Gruppe $G_\mathcal{F} = \langle\varphi\rangle$.
Einem Frobeniuselement φ wird der Fixkörper $\mathcal{F}_\varphi := \overline{k}_\varphi := \mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{Fix}(\langle\varphi\rangle)$ zugeordnet, das heißt, $G_\mathcal{F} = \langle\varphi\rangle$. Dann ist $f_\mathcal{F} = (\hat{\mathbb{Z}} : d(G_\mathcal{F})) = (\hat{\mathbb{Z}} : d(\langle\varphi\rangle)) = (\hat{\mathbb{Z}} : d(\varphi)\hat{\mathbb{Z}}) = d(\varphi) \in \mathbb{N}$, insbesondere endlich. Damit existiert wieder die Abbildung $d_\mathcal{F} : G_\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}$. Die Injektivität von $d_\mathcal{F}$ bedeutet $G_\mathcal{F} \cap I_k = \{1\}$, das heißt, $\mathcal{F}^{\mathrm{nr}} = \overline{k}$.
Es gilt nun $\langle\varphi_\mathcal{F}\rangle = G_\mathcal{F}$, denn $\langle\varphi_\mathcal{F}\rangle$ wird von $d_\mathcal{F}$ auf ganz $\hat{\mathbb{Z}}$ abgebildet, damit ist einerseits $\mathrm{Fix}(\varphi_\mathcal{F}) = \mathrm{Fix}(\langle\varphi_\mathcal{F}\rangle) = \mathrm{Fix}(G_\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, andererseits ist $\varphi_{\mathrm{Fix}(\varphi)} = \varphi_{\mathrm{Fix}(\langle\varphi\rangle)} = \varphi$, denn $d_{\mathrm{Fix}(\langle\varphi\rangle)}(\varphi) = \frac{1}{f_{\mathrm{Fix}(\langle\varphi\rangle)}} d(\varphi) = \frac{1}{d(\varphi)} d(\varphi) = 1$. □

1.6 Bemerkung: Ist das Frobeniuselement $\varphi \in \mathrm{frob}(K)$, so gilt $\langle\varphi\rangle \subset G_K$, da G_K abgeschlossen, somit für den zugehörigen Frobeniuskörper $\overline{k}_\varphi \supset K$. Auch hieran sieht man, dass für $f_K = \infty$ keine Frobeniuselemente in G_K existieren können, da $\overline{k}_\varphi$ f-endlich sein muss. Der Hilfssatz 1.5 erlaubt, im Folgenden ohne weitere Betonung die Begriffe Frobeniuselement und Frobeniuskörper gleichwertig zu benutzen. Die Bezeichnung $\mathrm{frob}'(L|K)$ fällt wieder weg.

1.3 Mikroprimstellen

1.7 Definition: Für eine Körpererweiterung $K|k$ sei auf der Menge $\mathrm{frob}(k)$ folgende Äquivalenzrelation festgelegt: Zwei Frobeniuselemente $\varphi, \psi \in \mathrm{frob}(k)$ heißen **K-äquivalent** $\sim_K$, falls ein $\sigma \in G_K$ und zwei Zahlen a und $b \in \mathbb{N}$ so existieren, dass

$$\varphi^a = \sigma^{-1}\psi^b\sigma.$$

Eine K-Äquivalenzklasse $(\varphi)_K := \{\psi \in \mathrm{frob}(k) \mid \psi \sim_K \varphi\}$ von $\varphi \in \mathrm{frob}(k)$ heißt **K-Mikroklasse**. Mit φ sind sämtliche Potenzen, deren Konjugierte und alle "Wurzeln" davon in $(\varphi)_K$. Die Menge $\mathrm{frob}(k)$ zerfällt in lauter disjunkte Äquivalenzklassen $(\varphi)_K$.

1.8 Definition: Zwei Frobeniuskörper $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ heißen **K-äquivalent**, falls es ein $\sigma \in G_K$ so gibt, dass das Kompositum $\sigma(\mathcal{F}_1)\mathcal{F}_2$ wieder Frobeniuskörper ist. Mit $(\mathcal{F})_K$ sei die K-Äquivalenzklasse, das heißt K-Mikroklasse, von $\mathcal{F}$ bezeichnet.

1.9 Bemerkung: (i) $\overline{k}$-Äquivalenz zweier Frobeniuselemente φ und ψ bedeutet, dass $\varphi^a = \psi^b$, das heißt, $\langle\varphi\rangle \cap \langle\psi\rangle$ enthält $\langle\varphi^a\rangle = \langle\psi^b\rangle$.

(ii) $\overline{k}$-Äquivalenz zweier Frobeniuskörper $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ bedeutet, dass das Kompositum $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$ Frobeniuskörper ist.

1.10 Definition: Der topologische Abschluss $\overline{(\varphi)_K}$ bezüglich der von der proendlichen Topologie G auf $\mathrm{frob}(k)$ induzierten Topologie heißt **K-Mikroprimstelle**. (Die Mikroprimstellen sind nun möglicherweise nicht mehr disjunkt.)

1.11 Hilfssatz ([Neu94] Bemerkung nach Definition 1.3): Wenn $K|k$ eine endliche Körpererweiterung ist, dann hat man für die Menge $\mathrm{spec}_K(K)$ der K-Mikroprimstellen innerhalb $\mathrm{frob}(K)$ die Bijektion:

$$\mathrm{spec}(K) \leftrightarrow \mathrm{spec}_K(K),$$

wobei $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}_K := \mathfrak{p} \cap G_K = \mathfrak{p} \cap \mathrm{frob}(K)$.

Beweis: Dann ist $G_K \subseteq G_k$ abgeschlossen von endlichem Index, das heißt offen. Sei $\varphi \in \mathrm{frob}(k)$ mit $\mathfrak{p} = \overline{(\varphi)_K^k}$, dabei sei $C := (\varphi)_K^k$ die K-Äquivalenzklasse von φ in $\mathrm{frob}(k)$, ferner $C_1 := (\varphi)_K^K$ die K-Äquivalenzklasse in $\mathrm{frob}(K)$. Da $G_K \subseteq G_k$ endlichen Index hat, ist $\varphi^a =: \varphi_K \in \mathrm{frob}(K)$ für geeignetes $a \in \mathbb{N}$, also gilt $\varphi_K \sim_K \varphi$. Es gibt einen Vertreter $\varphi_K \in \mathrm{frob}(K)$ in der K-Äquivalenzklasse in $\mathrm{frob}(k)$, demnach ist $C_1 = (\varphi_K)_K^k$.

Es zerfällt $G_k = \dot{\bigcup\limits_r} rG_K$, wobei r ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von G_K durchläuft. Die Mengen rG_K sind wie G_K offen und abgeschlossen. Genauso zerfällt $\mathrm{frob}(k) = \dot{\bigcup\limits_r}(\mathrm{frob}(k) \cap rG_K)$, ferner auch $C = \dot{\bigcup\limits_r} C_r$, wobei $C_r := C_1 \cap rG_K$. Da rG_K abgeschlossen und $C_r \subseteq rG_K$, ist auch der Abschluss $\overline{C_r} \subseteq rG_K$, somit $\mathfrak{p} := \overline{C} = \dot{\bigcup\limits_r} \overline{C_r}$, weil die endliche Vereinigung der $\overline{C_r}$ abgeschlossen ist. Damit gilt $\mathfrak{p} \cap \mathrm{frob}(K) = \mathfrak{p} \cap G_K = \overline{C} \cap G_K = \overline{C_1} = \mathfrak{p}_K$. Man sieht also, dass $\mathfrak{p}_K$ eine wohldefinierte Mikroprimstelle aus $\mathrm{spec}_K(K)$ und die Abbildung $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}_K$ injektiv ist. Sie ist auch surjektiv, da man immer $\overline{(\varphi)_K^k}$ als Urbild von $\overline{(\varphi)_K^K}$ wählen kann. $\square$

<u>1.12 Definition:</u> Für beliebiges $K|k$ heißt eine K-Mikroprimstelle $\mathfrak{p} = \overline{(\varphi)_K}$ **diskret**, falls die Menge $\mathfrak{p}_K := \mathfrak{p} \cap G_K \neq \emptyset$. (Ist $K|k$ nicht endlich, könnte $\mathfrak{p}_K$ größer als $\overline{(\varphi)_K \cap G_K}$, also nicht aus $\mathrm{spec}_K(K)$ sein.) In der Sprache der Frobeniuskörper bedeutet das, dass $\overline{(\mathcal{F})_K}$ einen K umfassenden Frobeniuskörper enthält. Die Menge der diskreten K-Mikroprimstellen sei mit $\mathrm{spec}_0(K)$ bezeichnet. Für eine diskrete Mikroprimstelle könnte $(\varphi)_K \cap G_K = \emptyset$ sein. Falls $(\varphi)_K \cap G_K \neq \emptyset$ ist, heiße die K-Mikroklasse $(\varphi)_K$ **diskret**. Der Abschluss einer diskreten Mikroklasse heiße **stark diskrete Mikroprimstelle**. Der **Restkörper** einer diskreten Mikroprimstelle $\mathfrak{p}$ sei $\kappa(\mathfrak{p}) := (k^{\mathrm{nr}})^{\langle \mathfrak{p}_K \rangle}$.

<u>1.13 Definition:</u> Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Dann hat man die surjektive Abbildung

$$\mathrm{spec}(L) \twoheadrightarrow \mathrm{spec}(K),$$

$\mathfrak{P} := \overline{(\varphi)_L} \mapsto \mathfrak{P}|_K := \overline{(\varphi)_K}$, das heißt, sie beruht auf der Vergröberung der Äquivalenzklassen $(\varphi)_L \mapsto (\varphi)_K$. Dass $\mathfrak{p}$ das Bild von $\mathfrak{P}$ ist, sei mit $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ bezeichnet.

<u>1.14 Hilfssatz ([Neu94]):</u> Die Abbildung lässt sich ohne Erzeuger beschreiben durch $\mathfrak{P}|_K := \bigcup\limits_{\sigma \in G_K/G_L} {}^{\sigma}\mathfrak{P}$, wobei ${}^{\sigma}\mathfrak{P} := \sigma\mathfrak{P}\sigma^{-1} \in \mathrm{spec}(\sigma K)$.

Beweis: Sei für Mikroklassen ${}^{\sigma}(\varphi)_L := \sigma(\varphi)_L\sigma^{-1}$, dann ist $(\varphi)_K = \bigcup\limits_{\sigma \in G_K/G_L} {}^{\sigma}(\varphi)_L$. Sei P der Abschluss von $\mathfrak{P}$ in G, also $\mathfrak{P} = P \cap \mathrm{frob}(k)$, und $c : G_K \times G \to G$ die stetige Abbildung $(\sigma, g) \mapsto \sigma g \sigma^{-1}$, dann ist die Menge

$$\bigcup_{\sigma \in G_K/G_L} {}^{\sigma}\overline{(\varphi)_L} = \bigcup_{\sigma \in G_K/G_L} {}^{\sigma}\mathfrak{P} = c(G_K \times \mathfrak{P}) = c(G_K \times P) \cap \mathrm{frob}(k)$$

als Herunterschnitt einer kompakten Menge kompakt, also abgeschlossen in $\mathrm{frob}(k)$. Damit ist

$$\overline{(\varphi)_K} = \overline{\bigcup_{\sigma \in G_K/G_L} \overline{{}^{\sigma}(\varphi)_L}} = \bigcup_{\sigma \in G_K/G_L} \overline{{}^{\sigma}(\varphi)_L}.$$

□

1.15 Folgerung (vgl. [Neu94] Satz 2.2, [Meh03] Definition 1.5): Im Fall $\overline{(\varphi)_L} = (\varphi)_L$, gilt auch $\overline{(\varphi)_K} = \bigcup_{\sigma \in G_K/G_L} \overline{{}^{\sigma}(\varphi)_L} = \bigcup_{\sigma \in G_K/G_L} {}^{\sigma}(\varphi)_L = (\varphi)_K$.

1.16 Hilfssatz ([Neu94] Proposition 1.4): Die Gruppe G_K operiert transitiv auf der Menge aller $\bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{spec}(\bar{k})$ mit $\bar{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}$. Ist $L|K$ galoissch, so operiert die Galoisgruppe $G(L|K)$ transitiv auf der Menge aller $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ durch ${}^{\sigma}\mathfrak{P} := \tilde{\sigma}\mathfrak{P}\tilde{\sigma}^{-1}$ mit einem Lift $\tilde{\sigma} \in G_K$ von $\sigma \in G_K/G_L$.

1.17 Hilfssatz ([MZ05]): Ist $L|K$ galoissch, dann führt 1.13 auf die Bijektion

$$G(L|K) \setminus \mathrm{spec}(L) \leftrightarrow \mathrm{spec}(K).$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(K)$ und $\mathfrak{P} \in \mathrm{spec}(L)$ mit $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. Im galoisschen Fall fallen die beiden Darstellungen $\mathfrak{p} = \bigcup_{\mathrm{spec}(L) \ni \mathfrak{P}'|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}' = \bigcup_{\sigma \in G(L|K)} {}^{\sigma}\mathfrak{P}$ zusammen, woraus die Behauptung folgt.□

1.18 Definition: Sei $L|K$ galoissch und $\mathfrak{P} \in \mathrm{spec}(L)$. Die Gruppe

$$G_{\mathfrak{P}}(L|K) := \{\sigma \in G(L|K) \mid {}^{\sigma}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\}$$

heißt **Zerlegungsgruppe** und

$$I_{\mathfrak{P}}(L|K) := I(L|K) \cap G_{\mathfrak{P}}(L|K)$$

Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ in K, wobei $I(L|K)$ das Bild von I_K in $G(L|K)$ sei.

1.19 Bemerkung: Es stellt sich die Frage, warum man bei der Definition einer Mikroprimstelle den Abschluss einer Mikroklasse bildet. Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung, $\mathfrak{P} = \overline{(\varphi)_L}$ eine L-Mikroprimstelle und die Menge $G(L|K)_{(\varphi)_L} := \{\sigma \in G(L|K) \mid {}^{\sigma}(\varphi)_L = (\varphi)_L\}$ die Zerlegungsgruppe der Mikroklasse.

1.20 Hilfssatz ([Wil98] 0.3.3): Sei G eine kompakte total unzusammenhängende topologische Gruppe und X eine Teilmenge. Dann gilt

$$\overline{X} = \bigcap_N NX,$$

insbesondere für jede abgeschlossene Teilmenge C von G

$$C = \bigcap_N NC,$$

wobei N jeweils die offenen Normalteiler von G durchläuft.

<u>**1.21 Hilfssatz:**</u> Die Untergruppe $G(L|K)_{\mathfrak{P}}$ ist abgeschlossen in $G(L|K)$.
Beweis: Es gilt ${}^{\tau\sigma}\mathfrak{P} = {}^{\sigma}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ für $\sigma, \tau \in G(L|K)_{\mathfrak{P}}$, und aus ${}^{\sigma}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ folgt $\mathfrak{P} = {}^{\sigma^{-1}}\mathfrak{P}$.
Für ein festes $\varphi_0 \in \mathrm{frob}(k)$ sei die Menge $X_{\varphi_0,\mathfrak{P}} := \{\sigma \in G(L|K) \mid \sigma\varphi_0\sigma^{-1} \in \mathfrak{P}\}$. Das ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{P}$ unter der stetigen Abbildung $G(L|K) \to \mathrm{frob}(k)$, $\sigma \mapsto \sigma\varphi_0\sigma^{-1}$, also abgeschlossen. Damit ist die Menge

$$\bigcap_{\varphi_0 \in \mathfrak{P}} X_{\varphi_0,\mathfrak{P}} = \{\sigma \in G(L|K) \mid {}^{\sigma}\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}\} =: X_{\mathfrak{P}}$$

abgeschlossen.
Andererseits ist die Menge $Y_{\varphi_0,\mathfrak{P}} := \{\sigma \in G(L|K) \mid \sigma^{-1}\varphi_0\sigma \in \mathfrak{P}\}$ das Urbild der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{P}$ unter der stetigen Abbildung $G(L|K) \to \mathrm{frob}(k)$, $\sigma \mapsto \sigma^{-1}\varphi_0\sigma$, also abgeschlossen, also auch

$$\bigcap_{\varphi_0 \in \mathfrak{P}} Y_{\varphi_0,\mathfrak{P}} = \{\sigma \in G(L|K) \mid {}^{\sigma^{-1}}\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}\} =: Y_{\mathfrak{P}}.$$

Die Mengen $X_{\mathfrak{P}}$ und $Y_{\mathfrak{P}}$ sind a priori nur Halbgruppen mit Einselement, und ihr Schnitt ist die Zerlegungsgruppe $G(L|K)_{\mathfrak{P}}$, diese ist also abgeschlossen. Die beiden Halbgruppen sind gleich der Zerlegungsgruppe, falls aus ${}^{\sigma}\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}$ bereits die Gleichheit folgt, in der Tat sieht man:

<u>**1.22 Hilfssatz:**</u> Aus ${}^{\sigma}\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}$ folgt ${}^{\sigma}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$.
Beweis: Sei also $\mathfrak{P} = \overline{(\varphi)_L}$ eine L-Mikroprimstelle und ${}^{\sigma}\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}$ mit $\sigma \in G(L|K)$. Dann ist ${}^{\sigma^i}\mathfrak{P} \subseteq {}^{\sigma^{i-1}}\mathfrak{P} \subseteq \cdots \subseteq {}^{\sigma}\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}$ und $\sigma(\varphi)_L = (\sigma\varphi\sigma^{-1})_L \subseteq \mathfrak{P}$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

(i) Entweder es existieren i, j mit $i \neq j$, ohne Einschränkung $i > j$, mit $(\sigma^i\varphi\sigma^{-i})_L = (\sigma^j\varphi\sigma^{-j})_L$, also $(\sigma^{i-j}\varphi\sigma^{j-i})_L = (\varphi)_L$, somit ${}^{\sigma^{i-j}}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$, also ${}^{\sigma}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$, oder

(ii) $(\sigma^i\varphi\sigma^{-i})_L \cap (\sigma^j\varphi\sigma^{-j})_L = \emptyset$ für alle $i, j \geq 0$, und $\mathfrak{P} \supseteq \dot{\bigcup\limits_{i\geq 0}} (\sigma^i\varphi\sigma^{-i})_L$.

Die proendliche Gruppe G_k ist kompakt und hausdorffsch. Die dichte Teilmenge $\mathrm{frob}(k)$ ist hausdorffsch, aber nicht kompakt, denn sie ist nicht abgeschlossen. Die Menge $\mathfrak{P}$ ist abgeschlossen in $\mathrm{frob}(k)$. Sei P der Abschluss von $\mathfrak{P}$ in G_k, dann ist $\mathfrak{P} = P \cap \mathrm{frob}(k)$. Wegen $\sigma(P) = \overline{\sigma(\mathfrak{P})}$ ist $\sigma(\mathfrak{P}) \subseteq \mathfrak{P} \Leftrightarrow \sigma(P) \subseteq P$ und $\sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \Leftrightarrow \sigma(P) = P$. Ferner ist P kompakt, also auch ${}^{\sigma^i}P$ für alle i. Jeder endliche Schnitt der abgeschlossenen Mengen ${}^{\sigma^i}P$ ist nicht leer, also gilt auch für den Gesamtschnitt $\bigcap\limits_{i\geq 0} {}^{\sigma^i}P \neq \emptyset$.

Ist dann auch $\bigcap\limits_{i\geq 0} {}^{\sigma^i}\mathfrak{P} = \bigcap\limits_{i\geq 0} {}^{\sigma^i}P \cap \mathrm{frob}(k) \neq \emptyset$?

Für ein festes $\lambda \in \hat{\mathbb{Z}}$ ist die Menge $\{\lambda\}$ abgeschlossen in $\hat{\mathbb{Z}}$, also ist auch das Urbild $d^{-1}(\{\lambda\}) =: d^{-1}(\lambda)$ unter der stetigen Abbildung $d : G_k \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ abgeschlossen in G_k. Wenn $d^{-1}(\lambda) \cap P$ nichtleer ist, ist wegen $d(\varphi) = d(\sigma^\nu\varphi\sigma^{-\nu}) = \lambda$ auch die Teilmenge $d^{-1}(\lambda) \cap {}^{\sigma^\nu}P$ nichtleer für alle $\nu \geq 0$. Somit ist der Durchschnitt von je endlich vielen der abgeschlossenen Mengen $d^{-1}(\lambda) \cap {}^{\sigma^\nu}P$ nichtleer. Da P kompakt ist, ist auch $\bigcap_{\nu\geq 0} d^{-1}(\lambda) \cap {}^{\sigma^\nu}P$ nichtleer.
Insgesamt ist $d^{-1}(\lambda) \cap P \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\bigcap_{\nu\geq 0} d^{-1}(\lambda) \cap {}^{\sigma^\nu}P \neq \emptyset$. Also nimmt d auf $\bigcap_{\nu\geq 0} {}^{\sigma^\nu}P$ dieselben Werte an wie auf P, wegen $\mathfrak{P} \subset P$ insbesondere welche aus $\mathbb{N}$, also ist

$\bigcap_{\nu\geq 0} {}^{\sigma^\nu}P \cap \mathrm{frob}(k) = \bigcap_{\nu\geq 0} {}^{\sigma^\nu}\mathfrak{P} \neq \emptyset$.
Aus der Sequenz $P \supseteq {}^{\sigma}P \supseteq {}^{\sigma^2}P \supseteq \cdots \supseteq {}^{\sigma^\nu}P \supseteq \cdots$ folgt

$$NP \supseteq N({}^{\sigma}P) \supseteq N({}^{\sigma^2}P) \supseteq \cdots \supseteq N({}^{\sigma^\nu}P) \supseteq \cdots .$$

Nun benutzt man den Hilfssatz 1.20. Sei N ein fester offener Normalteiler von G_k: Da N nur endlich viele Nebenklassen hat, gilt $N = N\sigma^\nu$ für ein ν, das heißt, $N\sigma^\nu\varphi\sigma^{-\nu} = \varphi\sigma^{-\nu}N = \varphi N = N\varphi$, woraus $N(\sigma^\nu\varphi\sigma^{-\nu})_L = N(\varphi)_L$, also $N^{\sigma^\nu}P = NP$, somit $N^{\sigma}P = NP$ folgt. Man erhält $P = \bigcap_N NP = \bigcap_N N^{\sigma}P = {}^{\sigma}P$, da mit P auch ${}^{\sigma}P$ abgeschlossen ist. Der Schnitt mit $\mathrm{frob}(k)$ liefert

$$\mathfrak{P} = {}^{\sigma}\mathfrak{P}.$$

$\square$

<u>1.23 Hilfssatz:</u> Genauer gilt: Die Zerlegungsgruppe $G_{\overline{(\varphi)}} := G(L|K)_{\overline{(\varphi)}}$ der Mikroprimstelle $\overline{(\varphi)}$ ist der Abschluss der Zerlegungsgruppe $G_{(\varphi)} := G(L|K)_{(\varphi)}$ der Mikroklasse $(\varphi) := (\varphi)_K$:

$$\overline{G_{(\varphi)}} = G_{\overline{(\varphi)}}.$$

Beweis: Nach Hilfssatz 1.20 gilt $\overline{G_{(\varphi)}} = \bigcap_N NG_{(\varphi)}$, wobei N die offenen Normalteiler von $G(L|K)$ durchläuft. Weil $(\varphi) \bmod N$ endlich ist, gilt $(\varphi) = \overline{(\varphi)} \bmod N$, ferner ist $\overline{(\varphi)} \subset (\varphi)N$, weil $(\varphi)N$ als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Nebenklassen von N abgeschlossen ist und (φ) umfasst, also ist $\overline{(\varphi)}N = (\varphi)N$. Damit gilt $NG_{(\varphi)} = NG_{\overline{(\varphi)}}$, folglich $\overline{G_{(\varphi)}} = \bigcap_N NG_{\overline{(\varphi)}} = G_{\overline{(\varphi)}}$. $\square$

<u>1.24 Bemerkung:</u> Die Zerlegungs- und Trägheitsgruppen von Mikroprimstellen verhalten sich wie diejenigen von Primstellen globaler Körper: Sei $L|K$ galoissch und $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(K)$. Für die Faser $\mathrm{spec}(L)_\mathfrak{p} := \{\mathfrak{P} \in \mathrm{spec}(L) \mid \mathfrak{P}|\mathfrak{p}\}$ und ein $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ hat man

$$G(L|K)/G_\mathfrak{P}(L|K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{spec}(L)_\mathfrak{p},$$

wobei $\sigma \mapsto {}^{\sigma}\mathfrak{P}$. Für eine galoissche Teilerweiterung L' von $L|K$ und $\mathfrak{P}' \in \mathrm{spec}(L')$ mit $\mathfrak{P}|\mathfrak{P}'$ ist $G_{\mathfrak{P}'}(L'|K)$ das Bild von $G_\mathfrak{P}(L|K)$ unter $G(L|K) \to G(L'|K)$. Für eine Teilerweiterung K' von $L|K$ ist $G_\mathfrak{P}(L|K') = G_\mathfrak{P}(L|K) \cap G(L|K')$. Für $\sigma \in G(L|K)$ ist $G_{\sigma\mathfrak{P}}(L|K') = \sigma G_\mathfrak{P}(L|K)\sigma^{-1}$. Entsprechendes gilt für die Trägheitsgruppen.

<u>1.25 Bemerkung:</u> Ist $N|K$ galoissch, $N \supseteq L \supseteq K$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(K)$ und $\mathfrak{P} \in \mathrm{spec}(L)$ mit $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$, dann hat man die Bijektion

$$G(N|L) \setminus G(N|K)/G_\mathfrak{P}(N|K) \leftrightarrow \mathrm{spec}(L)_\mathfrak{p},$$

wobei $\sigma \mapsto {}^{\sigma}\mathfrak{P}|_L$.

<u>1.26 Bemerkung:</u> Für $K|k$ beliebig und $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(K)$ sei der Restkörper $\kappa(\mathfrak{p}) := \bigcup_{E_\alpha \in \mathcal{E}(K|k)} \kappa(\mathfrak{p}_\alpha)$. Dabei seien $\mathcal{E}(K|k)$ das System der endlichen Teilerweiterungen von $K|k$,

$\mathfrak{p}_\alpha \in \operatorname{spec}(E_\alpha) = \operatorname{spec}_0(E_\alpha)$ mit $\mathfrak{p}|\mathfrak{p}_\alpha$ und $\kappa(\mathfrak{p}_\alpha) = (k^{\mathrm{nr}})^{\langle \mathfrak{p}_\alpha \cap G_{E_\alpha} \rangle}$ aus dem diskreten Fall. Ist $L|K$ galoissch und $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$, hat man damit die exakte Sequenz $1 \to I_{\mathfrak{P}}(L|K) \to G_{\mathfrak{P}}(L|K) \to G(\kappa(\mathfrak{P})|\kappa(\mathfrak{p})) \to 1$.

1.27 Definition: Sei $K|k$ und $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(K)$. "Die" **Henselisierung** $K_\mathfrak{p}$ sei der Fixkörper der Zerlegungsgruppe $G_\mathfrak{p} := G_{\bar{\mathfrak{p}}}(\bar{k}|K)$, diese ist der Normalisator $N_{G_K}(\langle \bar{\mathfrak{p}} \rangle)$ der Menge $\bar{\mathfrak{p}}$. Hierbei sei ein $\bar{\mathfrak{p}} \in \operatorname{spec}(\bar{k})$ mit $\bar{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}$ gewählt. Diese Wahl, und damit die Henselisierung, ist nur eindeutig bis auf G_K-Konjugation. Die Mikroprimstelle $\mathfrak{p}$ zerlegt sich bereits in $K_\mathfrak{p}$ voll: Ist $\hat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{spec}(K_\mathfrak{p})$ die Mikroprimstelle mit $\bar{\mathfrak{p}}|\hat{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}$, dann ist $\hat{\mathfrak{p}}$ in $\bar{k}|K_\mathfrak{p}$ unzerlegt.
Sei $\mathfrak{p}$ eine K-Mikroprimstelle. Falls $f_\mathfrak{p} := (\hat{\mathbb{Z}} : d(G_\mathfrak{p}))$ endlich ist, hat man den surjektiven Homomorphismus

$$d_\mathfrak{p} := \frac{1}{f_\mathfrak{p}} d : G_\mathfrak{p} \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$$

mit Kern $I_\mathfrak{p} := I \cap G_\mathfrak{p}$. Für diskrete Mikroprimstellen $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}_0(K)$ ist $f_\mathfrak{p}$ immer endlich.

1.28 Bemerkung: Falls $L|K$ galoissch, $\mathfrak{P} \in \operatorname{spec}(L)$ und $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(K)$ mit $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$, induziert $G_\mathfrak{p} \hookrightarrow G_K$ den Isomorphismus $G_\mathfrak{P}(L|K) \cong G(L_\mathfrak{P}|K_\mathfrak{p})$. Ist $L|K$ endlich, dann gilt $[L:K] = \sum\limits_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} [L_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{p}]$.

1.4 Der lokal unverzweigte Fall

1.29 Definition: Der Homomorphismus $d : G \to \hat{\mathbb{Z}}$ heißt **lokal unverzweigt**, falls für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(k)$ der Homomorphismus $d_\mathfrak{p} : G_\mathfrak{p} \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ ein Isomorphismus ist. Also ist $I_\mathfrak{p} = I \cap G_\mathfrak{p} = \{1\}$, das heißt, $k_\mathfrak{p} k^{\mathrm{nr}} = \bar{k}$, damit sind die Henselisierungen $k_\mathfrak{p}$ Frobeniuskörper. Ist ferner $K|k$ beliebig und $\mathfrak{p}$ eine diskrete K-Mikroprimstelle, dann ist $d_\mathfrak{p} : G_\mathfrak{p} \to \hat{\mathbb{Z}}$ ebenfalls ein Isomorphismus. Das Element $\varphi_\mathfrak{p} \in G_\mathfrak{p}$ mit $d_\mathfrak{p}(\varphi_\mathfrak{p}) = 1$ heißt der Frobenius der Erweiterung $\bar{k}|K_\mathfrak{p}$.

1.30 Hilfssatz ([Neu94] Proposition 2.2): Wenn d lokal unverzweigt ist, dann sind für jeden Körper K die Mikroklassen $(\varphi)_K$ bereits abgeschlossen in $\operatorname{frob}(k)$, das heißt Mikroprimstellen.
Beweis: Ist $\sigma \in \mathfrak{p}_0 := (\varphi)_{\bar{k}}$, dann ist $\sigma \in \sigma\mathfrak{p}_0\sigma^{-1} \cap \mathfrak{p}_0$, also $\mathfrak{p}_0 \subseteq \sigma\mathfrak{p}_0\sigma^{-1} \cap \mathfrak{p}_0$, somit $\sigma\mathfrak{p}_0\sigma^{-1} = \mathfrak{p}_0$. Also gilt für $\overline{\mathfrak{p}_0} := \overline{(\varphi)_{\bar{k}}}$ auch $\sigma\overline{\mathfrak{p}_0}\sigma^{-1} = \overline{\mathfrak{p}_0}$, somit $\overline{\mathfrak{p}_0} \subseteq G_{\overline{\mathfrak{p}_0}}$. Für beliebiges K gehört ein $\psi \in \mathfrak{p} := \overline{(\varphi)_K}$ wegen $\mathfrak{p} = \bigcup\limits_{\bar{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}} \bar{\mathfrak{p}} = \bigcup\limits_{\tau \in G_K} \tau\overline{\mathfrak{p}_0}\tau^{-1}$ zu einem dieser $\bar{\mathfrak{p}} = \tau\overline{\mathfrak{p}_0}\tau^{-1} \subseteq G_{\tau\overline{\mathfrak{p}_0}\tau^{-1}}$. Da $G_{\overline{\mathfrak{p}_0}} \to \hat{\mathbb{Z}}$ und $G_{\tau\overline{\mathfrak{p}_0}\tau^{-1}} \to \hat{\mathbb{Z}}$ Isomorphismen sind, gilt $\psi \sim_{\bar{k}} \psi^{d(\varphi)} \sim_K \varphi^{d(\psi)} \sim_{\bar{k}} \varphi$, damit $\psi \in (\varphi)_K$. □

1.31 Bemerkung: Wegen $\overline{(\varphi)_K} = \bigcup\limits_{\sigma \in G_K} \sigma\overline{(\varphi)_{\bar{k}}}\sigma^{-1}$ (siehe Definition 1.13) folgt die Abgeschlossenheit von $(\varphi)_K$ bereits aus der Abgeschlossenheit von $(\varphi)_{\bar{k}}$.

1.32 Satz (vgl. [Neu94] Proposition 2.3): Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) d ist lokal unverzweigt.

(ii) Die Zerlegungsgruppe $G_{\bar{\mathfrak{p}}} = \{\sigma \in G \mid {}^\sigma\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{p}}\}$ ist prozyklisch für jedes $\bar{\mathfrak{p}} \in \operatorname{spec}(\bar{k})$.

(iii) Der Normalisator $N_G\langle\varphi\rangle = \{\sigma \in G \mid \sigma\varphi\sigma^{-1} \in \langle\varphi\rangle\}$ ist prozyklisch für jedes $\varphi \in \mathrm{frob}(k)$.

(iv) Jede abgeschlossene abelsche Untergruppe A von G mit offenem Bild $d(A)$ in $\hat{\mathbb{Z}}$ ist prozyklisch.

(v) Für jede abgeschlossene abelsche Untergruppe A von G mit offenem Bild $d(A)$ in $\hat{\mathbb{Z}}$ gilt $A \cap I = \{1\}$.

(i)⇒(ii) Wegen der lokalen Unverzweigtheit von d ist $G_{\bar{\mathfrak{p}}} \cong \hat{\mathbb{Z}}$ prozyklisch.
(ii)⇒(iii) Sei $\varphi \in \mathrm{frob}(k)$ und $\bar{\mathfrak{p}} := \overline{(\varphi)_{\bar{k}}}$. Für $\sigma \in N_G\langle\varphi\rangle$ gilt $\langle\sigma\varphi\sigma^{-1}\rangle = \langle\varphi\rangle$, also nach Hilfssatz 1.4 $\sigma\varphi\sigma^{-1} = \varphi$. Dann gilt ${}^{\sigma}\bar{\mathfrak{p}} = \overline{(\sigma\varphi\sigma^{-1})_{\bar{k}}} = \overline{(\varphi)_{\bar{k}}} = \bar{\mathfrak{p}}$, damit $N_G\langle\varphi\rangle \subseteq G_{\bar{\mathfrak{p}}}$, und mit $G_{\bar{\mathfrak{p}}}$ ist auch $N_G\langle\varphi\rangle$ prozyklisch.
(iii)⇒(iv) Offenes Bild $d(A)$ in $\hat{\mathbb{Z}}$ heißt, der Index $n := [\hat{\mathbb{Z}} : d(A)]$ ist endlich und $d(A) = n\hat{\mathbb{Z}}$. Sei $\varphi \in A$ mit $d(\varphi) = n$, insbesondere $\varphi \in \mathrm{frob}(k)$. Weil A abelsch ist, gilt $a\varphi^{\nu}a^{-1} = \varphi^{\nu}$ für alle $a \in A$ und $\nu \in \hat{\mathbb{Z}}$, damit $A \subseteq N_G\langle\varphi\rangle$, und mit $N_G\langle\varphi\rangle$ ist auch A prozyklisch.
(iv)⇒(i) Für $\bar{\mathfrak{p}} := \overline{(\varphi)_{\bar{k}}}$ enthält die Gruppe $G' := \{\sigma \in G_K \mid (\sigma\varphi\sigma^{-1})_{\bar{k}} = (\varphi)_{\bar{k}}\}$ das Frobeniuselement φ, also ist $d(G')$ offen in $\hat{\mathbb{Z}}$. Sei $\sigma \in G'$ mit $d(\sigma) = 0$. Dann muss es $m, n \in N$ geben mit $\sigma\varphi^n\sigma^{-1} = \varphi^m$, also $nd(\varphi) = md(\varphi)$, woraus $m = n$ folgt. Für $\varphi' := \varphi^n$ gilt dann $\sigma\varphi' = \varphi'\sigma$, daher ist die abgeschlossene Untergruppe $A := \langle\sigma, \varphi'\rangle$ abelsch. Da A das Frobeniuselement φ' enthält, umfasst $d(A)$ die Menge $d(\varphi')\hat{\mathbb{Z}}$ und ist damit selbst offen in $\hat{\mathbb{Z}}$. Nach Annahme ist A deshalb prozyklisch. Da $d : A \to d(A) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ damit ein Isomorphismus ist, folgt $\sigma = 1$, und $d : G' \to \hat{\mathbb{Z}}$ ist injektiv. Daher muss $G' = \langle\psi\rangle$ erfüllen mit einem $\psi \in \mathrm{frob}(k)$. Sei $\varphi_1^n = \varphi^m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$, dann gilt $(\varphi_1\varphi\varphi_1^{-1})_{\bar{k}} = (\varphi)_{\bar{k}}$, also ist $(\varphi)_{\bar{k}} \subseteq G' = \langle\psi\rangle$. Dann muss $(\varphi)_{\bar{k}} = \psi^{\mathbb{N}} = G' \cap \mathrm{frob}(k)$ sein, also ist $(\varphi)_{\bar{k}}$ abgeschlossen in $\mathrm{frob}(k)$, somit $\bar{\mathfrak{p}} = (\varphi)_{\bar{k}}$ und $G' = G_{\bar{\mathfrak{p}}}$. Weil nun $d := G_{\bar{\mathfrak{p}}} \to \hat{\mathbb{Z}}$ injektiv ist, folgt $I_{\mathfrak{p}} = \{1\}$.
(iv)⇒(v) Wenn A ist prozyklisch ist, gibt es eine Surjektion $\hat{\mathbb{Z}} \to A$. Da A ein Frobeniuselemente enthält, kann der kombinierte Homomorphismus $h : \hat{\mathbb{Z}} \to A \xrightarrow{d} \hat{\mathbb{Z}}$ nur von der Form $h(x) = nx$, $n \in \mathbb{N}$ sein. Also ist h injektiv, damit auch d, und es folgt $A \cap I = \{1\}$.
(v)⇒(iv) ist offensichtlich. □

1.33 Bemerkung: Eine weitere äquivalente Bedingung ist: Jedes $\varphi \in \mathrm{frob}(k)$ operiert durch Konjugation fixpunktfrei auf $I \setminus \{\mathrm{id}\}$, das heißt, für $\tau \neq \mathrm{id} \in \ker(d)$ gilt stets $\varphi\tau\varphi^{-1} \neq \tau$.

1.34 Bemerkung: Im Artikel [Neu94] Proposition 2.5 wird die lokale Unverzweigtheit für die absolute Galoisgruppe sowohl eines lokalen als auch eines globalen Körpers gezeigt. Der Beweis im globalen Fall geht auf den Artikel [Gey69] "Unendliche algebraische Zahlkörper" von Wulf-Dieter Geyer zurück. Im Artikel [MZ05] wird die lokale Unverzweigtheit mit Kriterium (iii) bewiesen: Ist $\mathcal{F} = \mathrm{Fix}(\langle\varphi\rangle$ ein Frobeniuskörper und $\mathcal{N} = \mathrm{Fix}(N_G(\varphi)$, das heißt $\mathcal{F}|\mathcal{N}$ normal, dann ist auch $\mathcal{N}$ Frobeniuskörper.

1.35 Hilfssatz ([MZ05] Lemma 1.1): Ist $d : G = G_k \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt und $K|k$ eine f-endliche Körpererweiterung ($f_K < \infty$), dann ist auch $d_K = \frac{1}{f_K}d : G_K \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt.
Beweis: Ist A eine abgeschlossene abelsche Untergruppe von G_K mit offenem Bild $d_K(A)$ in $\hat{\mathbb{Z}}$, das heißt, $a := (\hat{\mathbb{Z}} : d_K(A)) < \infty$, also $d_K(A) = a\hat{\mathbb{Z}}$, dann ist A auch ein abgeschlossene

abelsche Untergruppe von G, und wegen $d(A) = f_K a\hat{\mathbb{Z}}$ ist $d(A)$ offen in $\hat{\mathbb{Z}}$. Die lokale Unverzweigtheit von d bedeutet nach 1.32, dass A prozyklisch ist, und überträgt sich damit auf d_K. $\square$

Im Rest des Kapitels sei $d : G \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt.

1.36 Definition: Ein Frobeniuselement $\varphi \in \mathrm{frob}(K)$ heißt **maximal**, falls aus $\varphi = \psi^n$ mit einem $\psi \in \mathrm{frob}(K)$ und $n \in \mathbb{N}$ bereits $n = 1$ folgt. Die Menge der maximalen Elemente in $\mathrm{frob}(K)$ sei mit $\max(K)$ bezeichnet. Entsprechend heiße ein Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ **minimal**, falls für jeden Frobeniuskörper $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ bereits $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ folgt.

1.37 Hilfssatz ([Neu94] Proposition 2.6): Für zwei maximale Frobeniuselemente ψ, ψ' und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\psi^n = \psi'^m$ gilt $\psi = \psi'$. Für jedes Element $\varphi \in \mathrm{frob}(K)$ existiert ein eindeutiges $\psi \in \max(K)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\varphi = \psi^n$. Dieses Element $\psi =: \sqrt[K]{(\varphi)}$ ist bestimmt durch $N_{G_K}\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$.
Beweis: Aus $\psi^n = \psi'^m$ folgt $(\psi)_{\bar{k}} = (\psi')_{\bar{k}} =: \bar{\mathfrak{p}}$, und wegen $\psi(\psi)_{\bar{k}}\psi^{-1} = (\psi)_{\bar{k}}$ gehört ψ zu der laut 1.32(iv) prozyklischen Zerlegungsgruppe $G_{\bar{\mathfrak{p}}} =: \langle\gamma\rangle$. Also ist $\langle\psi\rangle = \langle\gamma^n\rangle$ mit $n := [\langle\gamma\rangle : \langle\psi\rangle]$, nach Hilfssatz 1.4 folgt $\psi = \gamma^n$, also $\psi = \gamma$ wegen der Maximalität von ψ. Da andererseits $G_{\bar{\mathfrak{p}}} = \langle\psi\rangle = \langle\psi'\rangle$ gilt, ist $\psi = \psi'$ nach Hilfssatz 1.4. Ist $\varphi = \psi^n$, gehört ψ zu der nach Satz 1.32 prozyklischen Gruppe $N_{G_K}\langle\varphi\rangle =: \langle\gamma\rangle$. Also ist $\langle\psi\rangle = \langle\gamma^n\rangle$ mit $n := \langle\gamma\rangle : \langle\psi\rangle$, nach Hilfssatz 1.4 folgt $\psi = \gamma^n$, also $\psi = \gamma$ wegen der Maximalität von ψ. Für jedes Element $\varphi' \in \mathrm{frob}(K)$ mit $N_{G_K}\langle\varphi\rangle = \langle\varphi'\rangle$ folgt $\varphi' = \psi$ nach Hilfssatz 1.4. $\square$

1.38 Hilfssatz ([Neu94] Proposition 2.7): Die K-Mikroprimstellen sind die Mengen der Form

$$\mathfrak{p} = (\psi)_K = \{\sigma\psi^n\sigma^{-1} \mid \sigma \in G_K,\ \ n \in \mathbb{N}\},$$

mit einem maximalen Element $\psi \in \max(k)$.
Beweis: Die Mikroprimstelle $\mathfrak{p} = (\varphi)_K$ wird auch durch $\psi := \sqrt[K]{(\varphi)}$ erzeugt, denn es gilt $\varphi = \psi^n \sim_K \psi$ mit einem $n \in \mathbb{N}$. Für alle $\sigma \in G_K$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sigma\psi^n\sigma^{-1} \sim_K \psi$. Ist andererseits $\varphi' \sim_K \psi$, dann gibt es ein $\psi' \in \max(k)$ und ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $\varphi' = \psi'^{n'}$. Also gilt $\psi \sim_K \psi'$, und es gibt $m, m' \in \mathbb{N}$ mit $\psi'^{m'} = \sigma\psi^m\sigma^{-1} = (\sigma\psi\sigma^{-1})^m$. Nach 1.37 muss damit $\psi' = \sigma\psi\sigma^{-1}$, also $\varphi' = \sigma\psi^{n'}\sigma^{-1}$ sein. $\square$

1.39 Definition: Sei $K|k$. Der **Grad** einer diskreten K-Mikroprimstelle $\mathfrak{p}$ sei

$$\deg(\mathfrak{p}) := \mathrm{ggT}(d_K(\mathfrak{p} \cap G_K)).$$

Ein Element $\psi \in \mathfrak{p}_K = \mathfrak{p} \cap G_K$ der diskreten K-Mikroprimstelle $\mathfrak{p}$ heißt **Primelement**, falls $d_K(\psi) = \deg(\mathfrak{p})$.

1.40 Hilfssatz ([Neu94] Proposition 2.9): Die Primelemente ψ einer Mikroprimstelle $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}_0(K)$ bilden eine G_K-Konjugationsklasse maximaler Frobeniuselemente in $\mathfrak{p} \cap G_K$ und entsprechen via $\psi \mapsto \bar{\mathfrak{p}} := (\psi)_{\bar{k}} = \{\psi^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eineindeutig den $\bar{k}$-Mikroprimstellen mit $\bar{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}$. Die Zerlegungsgruppe einer solchen Mikroprimstelle $\bar{\mathfrak{p}}$ ist von der Form $G_{\bar{\mathfrak{p}}}(\bar{k}|K) = \langle\psi\rangle$, und ψ ist der Frobenius von $\bar{k}|K_{\bar{\mathfrak{p}}}$.
Beweis: (i),(ii) Sei ψ ein Primelement von $\mathfrak{p}$ und $\psi = \varphi^a$ für ein $\varphi \in \mathrm{frob}(K)$ und ein

$n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\varphi \sim_K \psi$, das heißt, $\varphi \in \mathfrak{p} \cap G_K$, ferner $d_K(\psi) = nd_K(\varphi)$, also $n = 1$ wegen der Minimalität von $d_K(\psi)$. Deshalb ist ψ ein in $\mathrm{frob}(K)$ maximales Element. Ist umgekehrt $\varphi \in \mathfrak{p} \cap \max(K)$, dann gibt es für jedes Primelement von $\mathfrak{p}$ ein $\sigma \in G_K$ und $m, n \in \mathbb{N}$ so, dass $\varphi^n = \sigma\psi^m\sigma^{-1} = (\sigma\psi\sigma^{-1})^m$. Da φ und $\sigma\psi\sigma^{-1}$ minimal sind, muss nach 1.37 $\varphi = \sigma\psi\sigma^{-1}$, also $d_K(\varphi) = d_K(\psi) = \deg(\mathfrak{p})$, damit φ ein Primelement von $\mathfrak{p}$ sein. (iii) Sei $\bar{\mathfrak{p}}(\varphi)_{\bar{k}}|\mathfrak{p}$ und $\psi := \sqrt[K]{(\varphi)}$, also $\varphi = \psi^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\psi \in \mathfrak{p} \cap \max(K)$ und $\bar{\mathfrak{p}} = (\psi)_{\bar{k}}$. Gilt $(\psi)_{\bar{k}} = (\psi')_{\bar{k}}$ für zwei Primelemente ψ, ψ' von $\mathfrak{p}$, dann ist $\psi \sim_{\bar{k}} \psi'$, das heißt, $\psi^n = \psi'^m$ für ein m, $n \in \mathbb{N}$, woraus nach 1.37 bereits $\psi = \psi'$ folgt. (iv) Nach 1.37 gilt für $\bar{\mathfrak{p}} = (\psi)_{\bar{k}}$ bereits $G_{\bar{\mathfrak{p}}} = N_{G_K}\langle\psi\rangle = \langle\psi\rangle$. Da ferner $G_{\bar{\mathfrak{p}}} = \langle\varphi_{\mathfrak{p}}\rangle$, gilt $\psi = \varphi_{\mathfrak{p}}$ nach 1.4. $\square$

1.41 Bemerkung: Entsprechend gilt $\deg(\mathfrak{p}) = f_{\mathcal{F}|K} = [\mathcal{F} \cap K^{\mathrm{nr}} : K]$ für jeden minimalen K enthaltenden Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ aus $\mathfrak{p}$. Die Mikroprimstelle $\mathfrak{p}$ kann also zwar auch Frobeniuskörper mit kleinerem Trägheitsgrad enthalten, diese fallen jedoch bei der Bildung von $\mathfrak{p}_K$ weg.

1.42 Definition: Seien für $L|K$ endlich $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ (siehe Definition 1.13) diskrete Mikroprimstellen von L bzw. K. Die Zahl $f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} := [\kappa(\mathfrak{P}) : \kappa(\mathfrak{p})]$ heißt der **Relativgrad** von $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$.

1.43 Hilfssatz ([Neu94] Proposition 2.10): Für den Relativgrad von $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ gelten:

(i) $f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = \frac{f_{L_{\mathfrak{P}}}}{f_{K_{\mathfrak{p}}}} = f_{L|K}\frac{\deg(\mathfrak{P})}{\deg(\mathfrak{p})} = [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}]$

(ii) Sei $\psi \in G_K$ ein solches Primelement von $\mathfrak{p}$, dass $\mathfrak{P} = (\psi)_L$ unter der $\bar{k}$-Mikroprimstelle $(\psi)_{\bar{k}}$ liegt. Dann ist $f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}$ die kleinste Zahl mit $\Psi := \psi^{f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}} \in G_L$, also $f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = (\langle\psi\rangle : \langle\psi\rangle \cap G_L)$, und Ψ ist Primelement von $\mathfrak{P}$.

(iii) Ist $L|K$ galoissch, gilt $f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = \#G_{\mathfrak{P}}(L|K)$.

1.44 Folgerung: Mit 1.28 folgt aus Hilfssatz 1.43(i) die Fundamentalgleichung

$$[L : K] = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}.$$

2 Konjugationsklassen in der Galois- und der Weilgruppe

In diesem Kapitel werden K-Mikroprimstellen als gewisse Konjugationsklassen in der absoluten Galoisgruppe eines lokalen Körpers motiviert, genauer erhält man aus K-Mikroprimstellen die G_K-Konjugationsklassen, welche in $W_K - I_K$ liegen.

2.1 Bemerkung: Sei k ein (lokaler) Körper und $E|k$ eine Galoiserweiterung. Das eigentliche Ziel ist eine Charakterisierung der Galoisgruppe $G = G(E|k)$. Ist G nicht kommutativ, ist eine direkte Charakterisierung der Gruppe G nur eindeutig bis auf innere Automorphismen.
Man untersucht nun nicht die Gruppe G selbst, sondern die Menge der Konjugationsklassen von G. Für $E = \bar{k}$ ist man im lokal unverzweigten Fall, und die Betrachtung der Mikroprimstellen führt auf spezielle Konjugationsklassen in G.
Sei also zusätzlich der stetige, surjektive Homomorphismus

$$d : G \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$$

gegeben. Seien $I := \ker(d)$ die Trägheitsgruppe, $W := d^{-1}(\mathbb{Z})$ die Weilgruppe und $\mathrm{frob}(k) := d^{-1}(\mathbb{N})$ ($0 \notin \mathbb{N}$) die Menge der Frobeniuselemente in G:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & G & \xrightarrow{d} & \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & W & \xrightarrow{d} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathrm{frob}(k) & \xrightarrow{d} & \mathbb{N} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Die proendliche Topologie von G induziert die Topologie auf W und auf $\mathrm{frob}(k)$. Die Gruppe G ist als proendliche Gruppe kompakt, die Untergruppe W ist lokalkompakter, dichter Normalteiler ($d(\sigma w \sigma^{-1}) = d(\sigma) + d(w) + d(\sigma^{-1}) = d(\sigma) + d(w) - d(\sigma) = d(w) \in \mathbb{Z}$ für $w \in W$, $\sigma \in G$). Auch $\mathrm{frob}(k)$ ist dicht in G. Man hat auch die Topologie auf W, in der I offen ist. Diese ist feiner als die hier verwendete induzierte Topologie.

2.2 Bemerkung: Im lokal unverzweigten Fall sind die Mikroklassen automatisch abgeschlossen in $\mathrm{frob}(k)$ (Hilfssatz 1.30). Im Folgenden wird <u>d als lokal unverzweigt</u> angenommen.

2.3 Bemerkung: Für Teilerweiterungen K von $E|k$ mit endlichem Trägheitsgrad $f_K := f_{K|k}$ (f-endlich) reproduziert sich die Situation: Sei $G_K := G(E|K)$, $W_K := W \cap G_K = d^{-1}(\mathbb{Z}) \cap G_K = d^{-1}(f_K\mathbb{Z}) \cap G_K = (\frac{1}{f_K}d)^{-1}(\mathbb{Z}) \cap G_K = d_K^{-1}(\mathbb{Z})$ und $\mathrm{frob}(K) := \{\varphi \in G_K \mid d(\varphi) \in \mathbb{N}\} = \mathrm{frob}(k) \cap G_K = \mathrm{frob}(k) \cap W_K$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & G \arrow[r, "d"] & \hat{\mathbb{Z}} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_K \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[d, equal] & G_K \arrow[r, "d_K"] \arrow[u, hook] & \hat{\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[u, hook, "f_K"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_K \arrow[r] & W_K \arrow[r, "d_K"] \arrow[u, hook] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0 \\
 & & \mathrm{frob}(K) \arrow[r, "d_K"] \arrow[u, hook] & \mathbb{N} \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

Die proendliche Topologie von G induziert die Topologie auf G_K, und damit auf W_K und auf $\mathrm{frob}(K)$. (Außerdem hat man wieder die hier nicht benutzte Topologie auf W_K, in der I_K offen ist.) Schließlich ist mit $d : G \to \hat{\mathbb{Z}}$ auch $d_K : G_K \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt. (Hilfssatz 1.35).

2.4 Bemerkung: Eine Mikroprimstelle hieß diskret, wenn $\mathfrak{p}_K := \mathfrak{p} \cap G_K \neq \emptyset$. Man hat die Zuordnung

$$\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}_K := \mathfrak{p} \cap G_K = \mathfrak{p} \cap \mathrm{frob}(K).$$

Ist $K|k$ endlich, so ist jede Mikroprimstelle diskret, und die Abbildung ergibt eine Bijektion zwischen den K-Mikroprimstellen in $\mathrm{frob}(k)$ und den K-Mikroprimstellen in $\mathrm{frob}(K)$. Man kann also ohne Einschränkung $K = k$ annehmen.

2.5 Bemerkung: Die Mikroprimstellen eines Körpers K haben (lokal unverzweigter Fall) die folgende einfache Form:

$$\mathfrak{p} = (\psi)_K = \{\sigma\psi^n\sigma^{-1} \mid \sigma \in G_K, n \in \mathbb{N}\},$$

wobei $\psi \in \max(k)$. Die obige Bijektion berücksichtigend, sind K-Mikroprimstellen also im Wesentlichen G_K-Konjugationsklassen maximaler Frobeniuselemente aus $\mathrm{frob}(K)$. Hierzu ordnet man einem $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}_0(K)$ die Konjugationsklasse der maximalen Elemente aus $\mathfrak{p}_K := \mathfrak{p} \cap G_K$ zu.

2.6 Definition: Betrachtet man nun einerseits W_K-Konjugationsklassen in W_K und andererseits G_K-Konjugationsklassen in G_K, so ergibt sich die folgende natürliche Abbildung:

$$W_K/\sim \;\longrightarrow\; G_K/\sim .$$

Eine G_K-Konjugationsklasse liegt entweder ganz in W_K oder ist disjunkt zu W_K, denn konjugierte Elemente haben unter d dasselbe Bild. Das heißt, im Bild der Abbildung sind G_K-Konjugationsklassen von Elementen aus W_K. Die Abbildung ist also auf keinen Fall surjektiv, denn auf der linken Seite sind nur Elemente mit ganzzahligem Wert von d zugelassen.
Es ist $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \text{ Pz.}} \mathbb{Z}_p$, wobei $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ und die diagonale Einbettung von $\mathbb{Z}$ in $\hat{\mathbb{Z}}$, das heißt, $x \mapsto (x, x, x, ...)$.

2.7 Hilfssatz ([Wil98] 1.5.1): Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $n\hat{\mathbb{Z}} + \mathbb{Z} = \hat{\mathbb{Z}}$,

(ii) $\hat{\mathbb{Z}}/n\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

(iii) (c) $n\hat{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $n = {p_1}^{r_1} \cdot ... \cdot {p_m}^{r_m}$, wobei p_i die verschiedenen Primteiler von n seien.
(i) Sei $z = (z_p) \in \hat{\mathbb{Z}}$. Gesucht ist ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $z_p - x \in n\mathbb{Z}_p$ für jede Primzahl p. Durch die Surjektivität der Abbildungen

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p_i}/{p_i}^{r_i}\mathbb{Z}_{p_i}$$

erhält man für jedes $i = 1, ..., m$ ein $y_i \in \mathbb{Z}$ mit $y_i + {p_i}^{r_i}\mathbb{Z}_{p_i} = z_{p_i} + {p_i}^{r_i}\mathbb{Z}_{p_i}$. Nach dem Chinesischen Restsatz (in $\mathbb{Z}$) existiert dann ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x + {p_i}^{r_i}\mathbb{Z}_{p_i} = z_{p_i} + {p_i}^{r_i}\mathbb{Z}_{p_i}$ für alle $i = 1, ..., m$. Also ist $z_{p_i} - x \in {p_i}^{r_i}\mathbb{Z}_{p_i}$. Für $p \notin \{p_1, ..., p_m\}$ ist $n\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$. Also ist $z_p - x \in n\mathbb{Z}_p$ für jede Primzahl p.
(ii),(iii): Aus (i) folgt

$$|\hat{\mathbb{Z}}/n\hat{\mathbb{Z}}| = |\mathbb{Z}/(n\hat{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Z})| \leq |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$$

mit Gleichheit nur für $n\hat{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$.
Andererseits betrachte die Abbildung $\theta : \hat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/{p_1}^{r_1}\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/{p_m}^{r_m}\mathbb{Z}$ mit $(z_p) \mapsto (\theta_1(z_{p_1}), ..., \theta_m(z_{p_m}))$, wobei $\theta_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/{p_i}^{r_i}\mathbb{Z}$ für $i = 1, ..., m$ sei. Dann ist $|\mathrm{im}(\theta)| = {p_1}^{r_1} \cdot ... \cdot {p_m}^{r_m} = n$ und $n\hat{\mathbb{Z}} \subseteq \ker\theta$. Also ist $|\hat{\mathbb{Z}}/n\hat{\mathbb{Z}}| \geq |\hat{\mathbb{Z}}/\ker\theta| = |\mathrm{im}(\theta)| = n$. Daraus folgen die Behauptungen. □

2.8 Folgerung: Für $x \in \hat{\mathbb{Z}}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $nx \in \mathbb{Z}$. Dann ist bereits in $x \in \mathbb{Z}$, da $\hat{\mathbb{Z}}$ als $\mathbb{Z}$-Modul torsionsfrei ist.

2.9 Satz: Sei $K|k$ endlich. Die G_K-Konjugationsklasse $\langle w \rangle$ eines Elementes $w \in W_K \setminus I_K$ ergibt sich aus seiner W_K-Konjugationsklasse $[w]$ durch Bildung des Abschlusses in W_K bezüglich der induzierten proendlichen Topologie.
Beweis: Sei zunächst $w = \psi \in \mathrm{frob}(K) \subset W_K$ ein maximales Element und $\mathfrak{p} := (\psi)_K$. Da $K|k$ eine endliche Erweiterung ist, ist d_K wieder lokal unverzweigt, damit $\mathfrak{p}_K$ abgeschlossen in $\mathrm{frob}(K)$.
Für $\mathfrak{p}_K := \mathfrak{p} \cap G_K$ gilt

$$\mathfrak{p}_K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}_K \cap d_K^{-1}(n).$$

Die Mengen $d_K^{-1}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ sind abgeschlossen in W_K und in $\mathrm{frob}(K)$: $d_K : G_K \to \hat{\mathbb{Z}}$ stetig und $\{n\}$ abgeschlossen in $\hat{\mathbb{Z}}$, also $d_K^{-1}(n) = G_K \cap M$ mit M abgeschlossen in G. Wegen $d_K^{-1}(n) \subset \mathrm{frob}(K) \subset W_K$ ist $G_K \cap M = W_K \cap M = \mathrm{frob}(K) \cap M$.

Die Mikroprimstelle $\mathfrak{p}_K$ ist abgeschlossen in $\mathrm{frob}(K)$, das heißt, $\mathfrak{p}_K = \mathrm{frob}(K) \cap M$, wobei M abgeschlossen in W_K ist. Wegen $d_K^{-1}(n) \subset \mathrm{frob}(K)$ ist also $\mathfrak{p}_K \cap d_K^{-1}(n) = \mathrm{frob}(K) \cap d_K^{-1}(n) \cap M = d_K^{-1}(n) \cap M$ abgeschlossen in W_K.
Für $n_0 := \deg(\mathfrak{p}) := \mathrm{ggT}\{d_K(\varphi) \mid \varphi \in \mathfrak{p} \cap G_K\}$ ergibt $\mathfrak{p}_K \cap d_K^{-1}(n_0)$ gerade die G_K-Konjugationsklasse der maximalen Elemente der Mikroprimstelle $\mathfrak{p}_K \in \mathrm{spec}(K)$, die also abgeschlossen ist in W_K.
Die restlichen Konjugationsklassen außerhalb von I_K ergeben sich daraus durch Bildung der inversen Klasse oder durch Bildung von Potenzen dieser Konjugationsklasse der maximalen Elemente, die wiederum abgeschlossene Konjugationsklassen sind.
Sei $\mathfrak{c}$ eine in W_K abgeschlossene G_K-Konjugationsklasse, also $\mathfrak{c} = W_K \cap M$ mit M abgeschlossen in G_K.
Übergang zur inversen Konjugationsklasse: Die Menge $\mathfrak{c}^{-1} := \{x^{-1} \mid x \in \mathfrak{c}\}$ ist wegen $(\sigma x \sigma^{-1})^{-1} = \sigma x^{-1} \sigma^{-1}$, $\sigma \in G_K$ wieder eine G_K-Konjugationsklasse. $\mathfrak{c}^{-1} = W_K \cap M^{-1}$ ist wieder abgeschlossen in W_K, da M^{-1} (Urbild von M unter der stetigen Inversenbildung) abgeschlossen in G_K.
Übergang zu Potenzen der Konjugationsklasse: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge $\mathfrak{c}^n := \{x^n \mid x \in \mathfrak{c}\}$ wegen $(\sigma x \sigma^{-1})^n = \sigma x^n \sigma^{-1}$ wieder eine Konjugationsklasse. Es gilt $\mathfrak{c}^n = W_F^n \cap M^n \subseteq W_F \cap M^n$. Andererseits sei $x \in W_F \cap M^n$. Dann ist $x = y^n$ mit $y \in M$, also $nd(y) = d(x) \in \mathbb{Z} \cap n\hat{\mathbb{Z}} = n\mathbb{Z}$ nach dem Hilfssatz 2.7, $\mathbb{Z}$ ist in $\hat{\mathbb{Z}}$ diagonal eingebettet. Wegen $\hat{\mathbb{Z}}$ torsionsfrei ist $d(y) \in \mathbb{Z}$, also $y \in W_F \cap M = \mathfrak{c}$ und $x = y^n \in \mathfrak{c}^n$. Da M^n in G_K abgeschlossen (M kompakt, da abgeschlossen in kompaktem G_K, Bildung der n-ten Potenz stetig, damit M^n als deren Bild von M kompakt in hausdorffschem G_K, also abgeschlossen), ist $\mathfrak{c}^n$ in W_K abgeschlossen.
Also ist die G_K-Konjugationsklasse $\langle w \rangle$ für $w \in W_K \setminus I_K$ abgeschlossen in W_K.
Es gilt $[x] \subseteq \langle x \rangle$, also $\overline{[x]} \subseteq \overline{\langle x \rangle} = \langle x \rangle$ für die Abschlüsse in W_K. Sei $gxg^{-1} \in \langle x \rangle$, $g \in G_K$. Da W_K dicht ist in G_K, existiert eine Folge von Elementen $w_\nu \in W_K$ mit $w_\nu \to g$ im Sinne der Topologie von G_K. Damit gilt $W_K \supset [x] \ni w_\nu x w_\nu^{-1} \overset{\nu\to\infty}{\to} gxg^{-1} \in \overline{[x]}$ aus Stetigkeitsgründen. Also gilt $\overline{[x]} = \langle x \rangle$. □

2.10 Bemerkung: Die oben betrachtete Abbildung muss nicht injektiv sein. Es kann verschiedene W_K-Konjugationsklassen geben, deren Abschluss in W_K dieselbe G_K-Konjugationsklasse ist.

3 Weiterführendes zu Mikroprimstellen

In diesem Kapitel werden bisherige Ergebnisse zur Beschreibung von Mikroprimstellen zusammengefasst. Die Grundlagen sind der Artikel von Koch und de Shalit ([KS96] S. 87) und der Artikel "Invarianten von Mikroprimstellen für p-adische Körper" von Ernst-Wilhelm Zink und Julia Mehlig. ([MZ05] S. 10ff, [Meh03] S. 24ff). Zusätzlich wird aus der Lubin-Tate-Theorie und der Normenkörpertheorie die später benutzten Ergebnisse zusammengefasst. Es wird bei ersterer der später gebrauchte K_0-Fall begonnen.

Sei k ein p-adischer Körper, das heißt ein vollständig diskret bewerteter Körper mit endlichem Restkörper κ der Charakteristik p. Sei mit $\bar{k}$ der separable Abschluss und mit k^{nr} die maximal unverzweigte Erweiterung von k bezeichnet. Für $G := G(\bar{k}|k)$ erhält man den Homomorphismus $d : G \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ als Hintereinanderausführung $d : G(\bar{k}|k) \twoheadrightarrow G(k^{\mathrm{nr}}|k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$, wobei letztere Abbildung den k-Frobenius auf $1 \in \hat{\mathbb{Z}}$ abbildet.

Für eine endliche Erweiterung $K|k$, also ist K wieder ein p-adischer Körper, reproduziert sich die Situation. Das angestrebte Ziel ist eine Beschreibung der Menge $\mathrm{spec}(K)$ in Termen von Invarianten des Körpers K. Im Artikel [MZ05] wird darauf eine Teilantwort für den Quotienten $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)$ gegeben. Ziel der vorliegenden Arbeit ist, diesen Fall zum Abschluss zu bringen.

3.1 Aus der Klassenkörpertheorie

3.1 Definition: Für eine endliche Körpererweiterung $L|K$ bezeichne

$$N_{L|K} := \{N_{L|K}(x) \mid x \in L^\times\} \subset K^\times$$

die **Normengruppe**. Ist $L|K$ unendlich, stehe $N_{L|K} := \bigcap_{E \in \mathcal{E}(L|K)} N_{E|K}$ für die Gruppe der **universellen Normen**. Nach Klassenkörpertheorie ist $N_{L|K} = N_{L \cap K^{\mathrm{ab}}|K}$.

3.2 Hilfssatz: Sei $L|k$ eine k^{nr} umfassende normale Körpererweiterung und $\mathcal{F}$ ein Frobeniuskörper. Dann ist $\mathcal{F} \cap L$ ein Frobeniuskörper innerhalb L, insbesondere $L|\mathcal{F} \cap L$ unverzweigt.

Beweis: In der Situation

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, dash, "\text{uv.}"] \arrow[dd, dash] & \bar{k} \arrow[d, dash] \\
 & L \arrow[d, dash] \\
\mathcal{F} \cap L \arrow[r, dash, "\text{uv.}"] \arrow[ur, dash, "?"] \arrow[d, dash] & (\mathcal{F} \cap L)k^{\mathrm{nr}} \arrow[d, dash] \\
\mathcal{F} \cap k^{\mathrm{nr}} \arrow[r, dash, "\text{uv.}"] & k^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

soll $(\mathcal{F} \cap L)k^{\mathrm{nr}} = L$ sein. Sei $\varphi_\mathcal{F} \in \mathrm{frob}(k)$ das zu $\mathcal{F}$ gehörige Frobeniuselement. Der Homomorphismus $d : G \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ ist die Hintereinanderausführung $G = G(\bar{k}|k) \overset{\cdot|_{k^{\mathrm{nr}}}}{\twoheadrightarrow} G(k^{\mathrm{nr}}|k) \overset{\sim}{\to} \hat{\mathbb{Z}}$. Ist L normal, dann induziert er wegen $k^{\mathrm{nr}} \subseteq L$ einen entsprechenden Homomorphismus $\tilde{d} : G(L|k) \twoheadrightarrow G(k^{\mathrm{nr}}|k) \overset{\sim}{\to} \hat{\mathbb{Z}}$. Dann hat man $\tilde{d}(\varphi|_L) = d(\varphi) \in \mathbb{N} \setminus 0$, also ist für das Frobeniuselement $\varphi_\mathcal{F} \in \mathrm{frob}(k)$ die Einschränkung $\varphi_\mathcal{F}|_L$ ein Frobeniuselement aus $\mathrm{frob}(L|k)$ und der Fixkörper $\mathcal{F} \cap L$ ein Frobeniuskörper in L. Insbesondere ist $L|\mathcal{F} \cap L$ ist unverzweigt, also $L = (\mathcal{F} \cap L)k^{\mathrm{nr}}$, und der Trägheitsgrad $f_{\mathcal{F}\cap L|k} = f_{\mathcal{F}|k} = d(\varphi_\mathcal{F})$ bleibt endlich. □

3.3 Folgerung ([MZ05] Lemma 1.3): Sei $\mathcal{F}$ ein Frobeniuskörper und E eine endliche Teilerweiterung. Dann ist die Gruppe der universellen Normen der Erweiterung $\mathcal{F}|E$ zyklisch mit einem einzigen Erzeugenden n_E, für das $\nu_E(n_E) = f_{\mathcal{F}|E}$ ist.

Beweis: Nach Klassenkörpertheorie ist $N_{\mathcal{F}|E} = N_{\mathcal{F}\cap E^{\mathrm{ab}}|E} =: N$. Mit $E \subset \mathcal{F}$ ist $E \cap k^{\mathrm{nr}} \subseteq \mathcal{F} \cap k^{\mathrm{nr}}$, das heißt, $f_E | f_\mathcal{F}$, also $d_E(\varphi_\mathcal{F}) = \frac{1}{f_E} d(\varphi_\mathcal{F}) = \frac{f_\mathcal{F}}{f_E} \in \mathbb{N}$. Nach Hilfssatz 3.2 ist $E^{\mathrm{ab}}|\mathcal{F} \cap E^{\mathrm{ab}}$ unverzweigt, also $N \cap U_E = N \cap N_{E^{\mathrm{nr}}|E} = N_{E^{\mathrm{ab}}|E} = \{1\}$, und man hat $\nu_E : N \cong NU_E/U_E \hookrightarrow E^\times/U_E \cong \mathbb{Z}$. Damit ist N zyklisch mit einem einzigen Erzeuger n_E so, dass $\nu_E(n_E) = (E^\times : NU_E) = f_{\mathcal{F}\cap E^{\mathrm{ab}}|E} = f_{\mathcal{F}|E}$. □

3.4 Definition: Das Erzeugende n_E aus Folgerung 3.3 heißt **die universelle Norm** der Erweiterung $\mathcal{F}|E$. Im Fall $f_{\mathcal{F}|E} = 1$ ist $\pi_E := n_E$ ein Primelement.

3.5 Hilfssatz ([MZ05] Lemma 1.4): Ist $\mathcal{F}$ ein Frobeniuskörper und σ ein Automorphismus von $\mathcal{F}$, so ist die Erweiterung $\mathcal{F}|\mathrm{Fix}(\sigma)$ unverzweigt.

3.6 Folgerung: Minimale Frobeniuskörper haben nur den trivialen K-Automorphismus.

3.7 Satz ([MZ05] Proposition 1.3): Für einen p-adischen Körper k ist der Homomorphismus $d : G(\bar{k}|k) \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt.

Beweis: Alternativ zum Beweis aus dem Artikel [JN94] zeigt man, dass der Normalisator $N_G(\langle\varphi\rangle)$ prozyklisch ist für jedes $\varphi \in \mathrm{frob}(k)$: Sei $\mathcal{F} := \bar{k}_\varphi$ und L der Fixkörper von $N_G(\langle\varphi\rangle)$. Dann ist $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \sigma\varphi\sigma^{-1} = \varphi \Leftrightarrow \sigma\langle\varphi\rangle\sigma^{-1} = \langle\varphi\rangle \Leftrightarrow \sigma \in N_G(\langle\varphi\rangle)$. Also ist die Erweiterung $\mathcal{F}|L$ normal. Sie ist unverzweigt, da sonst Hilfssatz 3.5 widersprechend auch $\mathcal{F}|\mathrm{Fix}(\sigma)$ verzweigt wäre, wobei $\sigma \in G(\mathcal{F}|\mathcal{F} \cap L^{\mathrm{nr}})$. Demnach gilt $N_G(\langle\varphi\rangle) \cap I = \{1\}$, damit ist $N_G(\langle\varphi\rangle) = G(\bar{k}|L) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ prozyklisch. □

Mit der lokalen Unverzweigtheit und der damit einfacheren Struktur der Mikroprimstellen gelingt der erste Ansatz zur Beschreibung von Mikroprimstellen:

3.8 Satz ([MZ05] Proposition 2.1): Sei K eine endliche Erweiterung des p-adischen Körpers k, dann hat man eine natürliche Surjektion

$$\operatorname{spec}(K) \twoheadrightarrow G(K^{\mathrm{nr}}|K) \setminus \mathscr{P}(K^{\mathrm{nr}}),$$

und für $\mathfrak{p} \mapsto [\pi]$ ist $\deg_K[\pi] := [K(\pi) : K]$ ein Teiler von $\deg(\mathfrak{p})$.
Beweis: Indem man einem Frobeniuskörper $\mathcal{F} \in \mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(K)$ die eindeutig bestimmte universelle Norm $\pi := \pi_{\mathcal{F}\cap K^{\mathrm{nr}}}$ der Erweiterung $\mathcal{F}|\mathcal{F}\cap K^{\mathrm{nr}}$ zuordnet, erhält man eine eindeutige G_K-Konjugationsklasse $[\pi]$ von Primelementen aus K^{nr}: Zwei Frobeniuskörper $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2$ ergeben dieselbe universelle Norm bezüglich $\mathcal{F}_i|\mathcal{F}_i \cap K^{\mathrm{nr}}$, weil $N_{\mathcal{F}_2|\mathcal{F}_2\cap K^{\mathrm{nr}}}|_{\mathcal{F}_1} = N_{\mathcal{F}_1|\mathcal{F}_1\cap K^{\mathrm{nr}}}$, also kann man ohne Einschränkung mit der G_K-Konjugationsklasse von minimalen Frobeniuskörpern in $\mathfrak{p}_K$ arbeiten. Diese Körper sind die Henselisierungen $K_{\mathfrak{p}}$. Die universellen Normen der Erweiterungen $K_{\mathfrak{p}}|K_{\mathfrak{p}} \cap K^{\mathrm{nr}}$ bilden eine G_K-Konjugationsklasse von Primelementen in K^{nr}. Diese wohldefinierte Abbildung ist surjektiv: Ist $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$ ein Primelement, dann findet man ([KdS96], §0.1) eine maximal reinverzweigte Erweiterung $E|K(\pi)$ so, dass π universelle Norm ist. E ist Frobeniuskörper, also $(E)_K = \mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(K)$ das gesuchte Urbild von π. Wegen $\pi \in K_{\mathfrak{p}} \cap K^{\mathrm{nr}} \supseteq K(\pi)$ ist $[K(\pi) : K] = f_{K(\pi)|K}$ ein Teiler von $[K_{\mathfrak{p}} \cap K^{\mathrm{nr}} : K] = f_{K_{\mathfrak{p}}|K} = \deg(\mathfrak{p})$. □

Man erhält also G_K-Konjugationsklassen von Primelementen aus K^{nr}. Allerdings ist die Menge dieser Konjugationsklassen zu grob, um die K-Mikroprimstellen zu beschreiben. Jedoch kann die Menge $G(K^{\mathrm{nr}}|K) \setminus \mathscr{P}(K^{\mathrm{nr}})$ später verfeinert werden, und man sieht, dass besagte Menge den "Quotient" $\operatorname{spec}(K^{1*}|K)$ mit $K^{1*} := (K^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ab}}$ beschreibt.

3.2 Markierungen

3.9 Definition: Sei $M|K$ normal. Eine Zuordnung

$$\mu := \{L \mapsto \pi_L\} := \{L \mapsto \pi_L \mid L \in \mathcal{E}'(M|K)\},$$

wobei $\mathcal{E}'(M|K)$ das System der endlichen normalen Teilerweiterungen von $M|K$ bezeichne, jedes π_L ein Primelement in L^{nr} ist,

(i) im Fall $L_2^{\mathrm{nr}} \supseteq L_1^{\mathrm{nr}}$ die Normverträglichkeit $N_{L_2^{\mathrm{nr}}|L_1^{\mathrm{nr}}}(\pi_{L_2}) = \pi_{L_1}$ erfüllt ist, insbesondere im Fall $L_2^{\mathrm{nr}} = L_1^{\mathrm{nr}}$ die Gleichheit $\pi_{L_2} = \pi_{L_1}$,

(ii) sowie der durch Adjunktion aller Primelemente erhaltene Körper

$$\mathcal{F}_\mu := K(\pi_L \mid L \in \mathcal{E}'(M|K))$$

einen endlichen Trägheitsgrad über K hat,

heißt (relative) **Markierung** über K innerhalb M, kurz $M|K$-Markierung (labelling, étiquetage). Deren Menge sei mit $\mathfrak{M}(M|K)$ bezeichnet.
Der endliche Trägheitsgrad $\deg(\mu) := f_{\mathcal{F}_\mu|K}$ heißt **Grad der $M|K$-Markierung** μ. Die Menge der $M|K$-Markierungen, deren Grad f teilt, sei mit $\mathfrak{M}(M|K)[f]$ bezeichnet.

Eine $\overline{K}|K$-Markierung heißt (absolute) K-**Markierung**, und es sei $\mathfrak{M}_K := \mathfrak{M}(\bar{K}|K)$. Bei diesen wird das System $\mathcal{E}'(K) := \mathcal{E}'(\bar{K}|K)$ aller endlichen normalen Erweiterungen von K durchlaufen.

3.10 Bemerkungen: (i) Es werden nur normale Erweiterungen betrachtet, weil für einen Frobeniuskörper $\mathcal{F}|K$ und endliche Erweiterungen $L|K$ die Erweiterung $L^{\mathrm{nr}}|\mathcal{F}\cap L^{\mathrm{nr}}$ stets unverzweigt sein soll. Mit $L|K$ ist auch $L^{\mathrm{nr}}|K$ normal, also $L^{\mathrm{nr}}|\mathcal{F} \cap L^{\mathrm{nr}}$ unverzweigt. Damit ist ein Primelement $\pi \in \mathcal{F} \cap L^{\mathrm{nr}}$ auch ein Primelement in L^{nr}. Das wird zur Konstruktion von Markierungen gebraucht.

(ii) Da π_L in L^{nr} liegt (nicht notwendigerweise in L), ist $L(\pi_L)|L$ eine endliche unverzweigte Erweiterung.

(iii) Da L_1, L_2 endliche Erweiterungen sind, ist $L_1^{\mathrm{nr}}|L_2^{\mathrm{nr}}$ endlich, und man hat die Normabbildung $N_{L_1^{\mathrm{nr}}|L_2^{\mathrm{nr}}}$:

$$\begin{tikzcd}
& L_1 \arrow[rr, dash] \arrow[ddl, dash] & & L_1L_2 \arrow[r, dash] \arrow[dl, dash] & L_1^{\mathrm{nr}} \arrow[d, dash] \\
& & L_2 \arrow[rr, dash] \arrow[dll, dash] & & L_2^{\mathrm{nr}} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[rrrr, dash] & & & & K^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

(iv) Da eine $M|K$-Markierung μ einen K enthaltenden Frobeniuskörpers in M bestimmen soll, muss $\mathcal{F}_\mu$ endlichen Trägheitsgrad haben (Bedingung (ii)).

(v) **Lubin-Tate-Markierungen** über K (siehe [KS96] 0.2, vgl. Beispiel in Definition 4.34): Für sämtliche (nicht notwendig normalen) endlichen Erweiterungen L des lokalen Körpers K (vollständig diskret bewertet mit endlichem Restkörper) wird ein Primelement aus $\tilde{L}$ gewählt (dabei ist mit $\tilde{L}$ die Vervollständigung $\widehat{L^{\mathrm{nr}}}$ der maximal unverzweigten Erweiterung von L gemeint) mit $\tilde{N}_{L_2|L_1}(\pi_{L_2}) := N_{\tilde{L}_2|\tilde{L}_1}(\pi_{L_2}) = \pi_{L_1}$ für jede endliche Erweiterung $L_2 \supseteq L_1$. Bedingung (ii) entfällt dort.
Wenn man nur $L_2^{\mathrm{nr}} \supseteq L_1^{\mathrm{nr}}$ hat, kann man L_2 wegen $L_2 \subseteq L_2L_1 \subset L_2L_1^{\mathrm{nr}} \subseteq L_2L_2^{\mathrm{nr}} = L_2^{\mathrm{nr}}$ durch $L_2' := L_1L_2 \supseteq L_1$ mit ${L_2'}^{\mathrm{nr}} = L_2^{\mathrm{nr}}$ ersetzen, also ohne Einschränkung $L_2 \supseteq L_1$ annehmen.
Ferner kann man auf die normalen L ausdünnen und umgekehrt normverträglich auffüllen: Für eine beliebige Erweiterung $E|K$ sei $\pi_E := N_{E_n^{\mathrm{nr}}|E^{\mathrm{nr}}}(\pi_{E_n})$, wobei E_n die minimale normale Erweiterung von E sei. Für beliebiges $E'|E$ folgt $N_{(E')^{\mathrm{nr}}|E^{\mathrm{nr}}}(\pi_{E'}) = N_{(E')^{\mathrm{nr}}|E^{\mathrm{nr}}}(N_{(E'_n)^{\mathrm{nr}}|(E')^{\mathrm{nr}}}(\pi_{E'_n})) = N_{E_n^{\mathrm{nr}}|E^{\mathrm{nr}}}(N_{(E'_n)^{\mathrm{nr}}|E_n^{\mathrm{nr}}}(\pi_{E'_n})) = N_{E_n^{\mathrm{nr}}|E^{\mathrm{nr}}}(\pi_{E_n}) = \pi_E$.

Zunächst werden nur Markierungen aus $\mathfrak{M}_K$ und (absolute) K enthaltende Frobeniuskörper betrachtet.

3.11 Hilfssatz ([MZ05] Proposition 3.1): Frobeniuskörper bestimmen Markierungen und umgekehrt:

(i) Ist $\mathcal{F}$ ein Frobeniuskörper, so ist $\mu_{\mathcal{F}} := \{L \mapsto \pi_L\}$, wobei π_L die universelle Norm von $\mathcal{F}|\mathcal{F} \cap L^{\mathrm{nr}}$ sei, eine Markierung.

(ii) Ist $\mu = \{L \mapsto \pi_L\}$ eine Markierung, dann ist $\mathcal{F} := \mathcal{F}_\mu$ ein Frobeniuskörper und π_L die universelle Norm der Erweiterung $\mathcal{F}|\mathcal{F} \cap L^{\mathrm{nr}}$, das heißt, $\mu = \mu_{\mathcal{F}_\mu}$.

3.12 Folgerung ([MZ05] Korollar 2): (i) Definiert ein Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ die Markierung μ, dann ist $\mathcal{F}_\mu \subseteq \mathcal{F}$.

(ii) $\mathcal{F}_\mu$ ist der kleinste aller Frobeniuskörper, der die Markierung μ definiert.

(iii) Frobeniuskörper mit $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ definieren dieselbe Markierung.

3.13 Definition: Zwei Markierungen $\mu = \{L \mapsto \pi_L\}$ und $\mu' = \{L \mapsto \pi'_L\} \in \mathfrak{M}_K$ heißen G_K**-konjugiert**, falls ein Automorphismus $\sigma \in G_K$ so existiert, dass für alle endlichen normalen Erweiterungen $L|K$ gilt:

$$\pi'_L = \sigma(\pi_L).$$

3.14 Hilfssatz ([MZ05] Proposition 3.2): Konjugierte Frobeniuskörper definieren konjugierte Markierungen: Sei $\sigma \in G_K$ und $\mathcal{F}$ ein Frobeniuskörper, der die Markierung $\mu = \{L \mapsto \pi_L\}$ definiert. Dann ist auch $\sigma(\mathcal{F})$ ein Frobeniuskörper und definiert die Markierung $\mu^\sigma := \{L \mapsto \sigma(\pi_L)\}$.

3.15 Satz ([MZ05] Proposition 3.3): Es ergibt sich eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{spec}(K) \leftrightarrow G_K \setminus \mathfrak{M}_K$$

zwischen den Mikroprimstellen von K und den G_K-Konjugationsklassen von K-Markierungen. Die Abbildung wird dadurch induziert, dass man einem Frobeniuselement $\varphi \in \mathfrak{p}_K = \mathfrak{p} \cap G_K$ die Markierung $\mu := \mu_{\mathrm{Fix}(\varphi)} \in \mathfrak{M}_K$ zuordnet. Dabei gilt $\deg(\mathfrak{p}) = \deg(\mu)$.

3.3 Die Körper $K^{n*}|K$

Die Beschreibung von $\mathrm{spec}(K)$ soll iterativ geschehen. Dazu wird folgender Körperturm benutzt:

$$\cdots \mid ((K^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{ab}} \mid (K^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ab}} \mid K^{\mathrm{nr}} \mid K.$$

3.16 Definition: Die Körper $K^{n*}|K$, $n \geq 0$, seien festgelegt durch $K^{0*} := K^{\mathrm{nr}}$ und $K^{(n+1)*} := (K^{n*})^{\mathrm{ab}}$.

3.17 Bemerkung: Statt der Gruppe $G(\overline{K}|K)$ wird nun für wachsendes $n \geq 0$ jeweils die Gruppe $G(K^{n*}|K)$ betrachtet. Man hat die exakte Sequenz $1 \to I_K \to G(\bar{K}|K) \xrightarrow{d_K} \hat{\mathbb{Z}} \to 0$ und betrachtet die von I_K abgeleiteten Gruppen: $D^0(I_K) := I$, $D^{n+1}(I_K) := [D^n(I_K), D^n(I_K)]$. Dann ist K^{n*} der Fixkörper von $D^n(I_K)$. Auf $G(K^{n*}|K)$ induziert der stetige surjektive Homomorphismus $d_K : G \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ einen ebensolchen, der Einfachheit halber sei er auch mit d_K bezeichnet: $d_K : G(K^{n*}|K) \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$. Damit hat man laut Anfangskapitel die Mengen $\mathrm{frob}(K^{n*}|K)$ und $\mathrm{spec}(K^{n*}|K)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen $\mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K)$ und $\mathrm{spec}(K^{n*}|K)$ sollen verbunden werden.

3.18 Hilfssatz: Sei L eine K^{nr} umfassende normale Teilerweiterung von $K^{(n+1)*}$. Dann ist $\mathcal{F} \cap L$ ein Frobeniuskörper innerhalb L, insbesondere ist $L|\mathcal{F} \cap L$ unverzweigt.

3.19 Bemerkung: In dieser Situation folgt aus der Surjektivität der Abbildung $G(K^{(n+1)*}|K) \twoheadrightarrow G(L|K)$ wegen $d_K(\varphi) = d_K(\varphi|_L)$ die Surjektivität $\mathrm{frob}(K^{(n+1)*}|K) \twoheadrightarrow \mathrm{frob}(L|K)$ für Frobeniuselemente bzw. Frobeniuskörper. Entsprechend hat man für eine Erweiterung $F|K$ mit $f_{F|K} < \infty$ und $L \supset F$ die Surjektion $\mathrm{frob}(K^{(n+1)*}|F) \twoheadrightarrow \mathrm{frob}(L|F)$, im Fall $f_{F|K} = \infty$ sind beide Seiten leer.

3.20 Hilfssatz ([MZ05] Lemma 4.2): Sei $\mathcal{F}_0 \subset K^{n*}$ ein Frobeniuskörper. Dann ist die Zuordnung $\mathcal{E}(\bar{K}|\mathcal{F}_0) \ni L \mapsto A(L) := \varprojlim\limits_{E \in \mathcal{E}(L|K)} \hat{E}^{\times}$, wobei $\hat{E} := \varprojlim\limits_{F \in \mathcal{E}(E)} A(E)/N_{F|K}A(F)$ die proendliche Vervollständigung sei, eine $G(\bar{K}|\mathcal{F}_0)$-Modulation mit Galoisabstieg, das heißt, $\mathrm{res}^L_{L'} : A(L) \to A(L')^{G(L'|L)}$ ist ein Isomorphismus für alle endlichen Erweiterungen $L'|L \in \mathcal{E}(\bar{k}|\mathcal{F}_0)$.

3.21 Hilfssatz ([MZ05] Lemma 4.1): Für jedes $\varphi \in \mathrm{frob}(K^{(n+1)*}|K)$ gilt $G(K^{(n+1)*}|K^{n*})^{\langle\varphi\rangle} = \{1\}$.

Beweis: $G(K^{(n+1)*}|K^{n*}) = \varprojlim\limits_{E \in \mathcal{E}(K^{n*}|K)} G(E^{\mathrm{ab}}|E^{\mathrm{nr}}) \cong \varprojlim\limits_{E \in \mathcal{E}(K^{n*}|K)} U_E$ nach Klassenkörpertheorie, wobei beim ersten Limes die Projektionen und beim zweiten Limes die Normen die Übergangsabbildungen sind.

Sei bei der Isomorphie $\sigma_0 \mapsto (u_E)_E$, dann geht die Gleichung $\sigma_0 = \varphi\sigma_0\varphi^{-1}$ über in $\varphi(u_E) = u_{\varphi(E)}$ für alle $E \in \mathcal{E}(K^{n*}|K)$.

Nun sieht man, dass alle $u_E = 1$ sind: Sei $\varphi_0 := \varphi|_{K^{n*}}$. Nach dem vorigen Hilfssatz hat man für den Frobeniuskörper $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F} \cap K^{n*} = \mathrm{Fix}(\varphi_0)$ in K^{n*} die $G(\bar{K}|\mathcal{F}_0)$-Modulation mit Galoisabstieg $\mathcal{E}(\bar{K}|\mathcal{F}_0) \ni L \mapsto A(L)$. Da f_L endlich ist, kann ein Exponent $\nu_L : A(L) \to \hat{\mathbb{Z}}$ festgelegt werden: Sei $x = (x_E)_E \in A(L)$, das heißt, $x_E \in \hat{E}$, und $\hat{\nu}_E$ die Fortsetzung von ν_E auf $\hat{E}$. Setze $\nu_L(x) := \hat{\nu}_{L \cap K^{\mathrm{nr}}}(x_{L \cap K^{\mathrm{nr}}})$. Da $(x_E)_E$ normisch ist, hat man $\nu_L(x) = f_{L|E}\hat{\nu}_E(x_E)$ für alle $E \in \mathcal{E}(L|K)$.

Wegen des Galoisabstiegs gilt für $U(L) := \ker(\nu_L)$ auch $U(L) = U(L')^{G(L'|L)}$, ferner ist $\varprojlim\limits_{E \in \mathcal{E}(K^{n*}|K)} U_E = \varprojlim\limits_{L \in \mathcal{E}(K^{n*}|\mathcal{F}_0)} U(L)$. Damit hat man $(\varprojlim\limits_{E \in \mathcal{E}(K^{n*}|K)} U_E)^{\langle\varphi\rangle} = (\varprojlim\limits_{E \in \mathcal{E}(K^{n*}|K)} U_E)^{\langle\varphi_0\rangle} = \varprojlim\limits_{L \in \mathcal{E}(K^{n*}|\mathcal{F}_0)} U(L)^{\langle\varphi_0\rangle} = \bigcap\limits_{i \geq 1} U(\mathcal{F}_0)^i = \{1\}$, weil $U(L)^{\langle\varphi_0\rangle} = U(\mathcal{F}_0)$ für den Erzeuger φ_0 der Galoisgruppe $G(K^{n*}|\mathcal{F}_0)$, und in $U(\mathcal{F}_0)$ entspricht $N_{L'|L}$ der Bildung der $[L' : L]$-ten Potenz. □

3.22 Hilfssatz: Sei $\mathcal{F}$ ein Frobeniuskörper in $K^{(n+1)*}$ und $\sigma \in G(K^{(n+1)*}|K)$ mit $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ für alle $n \geq -1$. Dann ist $\mathcal{F}|\mathrm{Fix}_{\mathcal{F}}(\sigma)$ unverzweigt, wobei $\mathrm{Fix}_{\mathcal{F}}(\sigma) := \mathrm{Fix}(\sigma) \cap \mathcal{F}$.

3.23 Folgerung: Minimale Frobeniuskörper in K^{n*} haben nur den trivialen Automorphismus.

3.24 Satz ([MZ05] Proposition 4.1): Für alle $n \geq 0$ ist der Homomorphismus $d_K : G(K^{n*}|K) \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt.

Beweis: Mit dem vorigen Hilfssatz folgt wie in Satz 3.7, dass $N_G(\langle\varphi\rangle)$ prozyklisch ist für jedes $\varphi \in \mathrm{frob}(K^{n*}|K)$ und alle $n \geq 0$. □

3.25 Bemerkung: Die Menge $\mathrm{spec}(K^{n*}|K)$ hat wieder die vereinfachte Struktur: Die K-Mikroklassen sind in $\mathrm{frob}(K^{n*}|K)$ bereits abgeschlossen, das heißt Mikroprimstellen. Sie sind durch $G(K^{n*}|K)$-Konjugationsklassen maximaler Frobeniuselemente bzw. minimaler Frobeniuskörper bestimmt. Sei nun $\mathfrak{P} := (\mathcal{F})_K \in \mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K)$. Der Frobeniuskörper $\mathcal{F} \cap K^{n*}$ führt auf die Mikroprimstelle $\mathfrak{p} := (\mathcal{F} \cap K^{n*})_K \in \mathrm{spec}(K^{n*}|K)$. Die Menge $\{\mathcal{F} \cap K^{n*} \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{P}\}$ wird im Allgemeinen nur eine echte Teilmenge der Mikroprimstelle $\mathfrak{p} = (\mathcal{F} \cap K^{n*})_K$ sein, weitere K-äquivalente Frobeniuskörper in K^{n*} können existieren, insbesondere auch solche, die den Grad der Mikroprimstelle (auf einen Teiler des ursprünglichen Grades) sinken lassen. Geht man von einer Henselisierung $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ aus, das heißt, $\deg(\mathfrak{P}) = f_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}|K}$, ist $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}} \cap K^{n*}$ nicht notwendigerweise eine Henselisierung von $\mathfrak{p}$. Sinkt der Grad der Mikroprimstelle, dann ist $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}} \cap K^{n*}|\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ eine endliche unverzweigte Erweiterung

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
 & \mathcal{F}_{\mathfrak{P}} \arrow[r] \arrow[d] & K^{(n+1)*} \arrow[d] \\
\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & \mathcal{F}_{\mathfrak{P}} \cap K^{n*} \arrow[r] & K^{n*}
\end{tikzcd}$$

Ganz klar ist das im Fall $n = 0$: Innerhalb von $K^{0*} = K^{\mathrm{nr}}$ sind alle Körper Frobeniuskörper, und sie sind alle äquivalent. Somit gibt es nur eine Mikroprimstelle, deren Henselisierung ist K und ihr Grad ist 1. Bei der Abbildung $\mathrm{spec}(K^{1*}|K) \to \mathrm{spec}(K^{0*}|K)$ sinkt der Grad immer auf 1.

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
 & \mathcal{F}_{\mathfrak{P}} \arrow[r] \arrow[d] & K^{1*} \arrow[d] \\
K \arrow[r] & \mathcal{F}_{\mathfrak{P}} \cap K^{\mathrm{nr}} \arrow[r] & K^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung $\mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K) \to \mathrm{spec}(K^{n*}|K)$, $(\mathcal{F})_K \mapsto (\mathcal{F} \cap K^{n*})_K$ ist surjektiv wegen der Surjektivität der Einschränkung für Frobeniuskörper. Mit diesen Übergangsabbildungen soll die eingangs erwähnte iterative Beschreibung geschehen:

$$\mathrm{spec}(\overline{K}|K) = \varprojlim_{n \geq 0} \mathrm{spec}(K^{n*}|K).$$

3.4 Iterative Beschreibung durch Markierungen

Im Folgenden wird Schritt für Schritt erläutert, wie die Mengen $\mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K)$ in Termen von K^{n*} beschrieben werden können. Das Ziel ist die Bijektion $\mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K) \leftrightarrow G(K^{n*}|K) \setminus \mathfrak{M}(K^{n*}|K)$.

3.26 Hilfssatz ([MZ05] Lemma 5.1): Ist $\mathcal{F} \subset K^{(n+1)*}$ ein Frobeniuskörper und $L|K$

eine endliche Erweiterung innerhalb von K^{n*}, dann ist die Erweiterung $\mathcal{F}|\mathcal{F} \cap L^{\mathrm{nr}}$ groß genug, dass die Gruppe der universellen Normen durch ein Primelement $\pi_L \in \mathcal{F} \cap L^{\mathrm{nr}}$ erzeugt wird. Ist $L|K$ darüber hinaus normal, so ist π_L auch Primelement in L^{nr}.

3.27 Hilfssatz ([MZ05] Lemma 5.3): Frobeniuskörper in $K^{(n+1)*}$ bestimmen $K^{n*}|K$-Markierungen und umgekehrt:

(i) Sei $\mathcal{F}_1$ ein Frobeniuskörper in $K^{(n+1)*}$, dann ist $\mu_{\mathcal{F}_1} := \{L \mapsto \pi_L\}$, wobei π_L für jedes $L \in \mathcal{E}'(K^{n*}|K)$ die nach Hilfssatz 3.26 eindeutige universelle Norm der Erweiterung von $\mathcal{F}_1|\mathcal{F}_1 \cap L^{\mathrm{nr}}$ sei, eine Markierung aus $\mathfrak{M}(K^{n*}|K)$.

(ii) Sei $\mu \in \mathfrak{M}(K^{n*}|K)$. Dann gibt es einen Frobeniuskörper $\mathcal{F}_1 \subset K^{(n+1)*}$ mit $\mu = \mu_{\mathcal{F}_1}$.

3.28 Satz ([MZ05] Proposition 5.1): Für alle $n \geq 0$ ergibt sich eine Bijektion

$$\operatorname{spec}(K^{(n+1)*}|K) \leftrightarrow G(K^{n*}|K) \setminus \mathfrak{M}(K^{n*}|K)$$

zwischen den $K^{(n+1)*}|K$-Mikroprimstellen und den $G(K^{n*}|K)$-Konjugationsklassen von $K^{n*}|K$-Markierungen. Die Abbildung wird dadurch induziert, dass man einem Frobeniuselement $\varphi \in \mathfrak{p}_K := \mathfrak{p} \cap G(K^{(n+1)*}|K)$ gemäß Hilfssatz 3.27(i) die Markierung $\mu := \mu_{Fix(\varphi)} = \mu_{K_\varphi^{(n+1)*}} \in \mathfrak{M}(K^{n*}|K)$ zuordnet. Dabei gilt $\deg(\mathfrak{p}) = f_{\mathcal{F}_\mathfrak{p}|K} = \deg(\mu)$.

3.29 Folgerung ([MZ05] Proposition 5.1 *2.*): Der Fall $n = 0$ verfeinert Satz 3.8 zur Bijektion

$$\operatorname{spec}(K^{1*}|K) \leftrightarrow G(K^{\mathrm{nr}}|K) \setminus \mathscr{P}(K^{\mathrm{nr}})$$

auf Konjugationsklassen von Primelementen in K^{nr}, denn eine $K^{\mathrm{nr}}|K$-Markierung entspricht einem einzigen Primelement in K^{nr}. Bereits ein Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ in K^{1*} ist groß genug, um eine universelle Norm π für die Erweiterung $\mathcal{F}|\mathcal{F} \cap K^{\mathrm{nr}}$ zu bestimmen. Es gilt $\deg(\mathfrak{p}) = f_{\mathcal{F}_\mathfrak{p}|K} = [K(\pi) : K]$.

3.5 Aus der Normenkörpertheorie

Hier darf K ein lokaler Körper in dem Sinne sein, dass er einen perfekten Restkörper κ der Charakteristik p besitzt. Das ist insbesondere bei algebraisch abgeschlossenem Restkörper $\bar{\mathbb{F}}_p$ erfüllt. Es werden hier einige Fakten aufgezählt, ausführlich ist zum Beispiel die Diplomarbeit [Sti02] von Rahel Stichtenoth, Kapitel 2. Grundlage ist der Artikel [Win83] über Normenkörper von Jean-Pierre Wintenberger.

3.30 Definition: Sei $L|K$ eine algebraische separable Erweiterung. Mit den Normen $N_{E'|E}$ für $E'|E$ wird $\mathcal{E}(L|K)$ zu einem projektiven System, und man setzt

$$\mathbb{X}_K(L)^\times := \varprojlim_{E \in \mathcal{E}(L|K)} E^\times,$$

sowie durch formales Hinzufügen einer Null

$$\mathbb{X}_K(L) := \mathbb{X}_K(L)^\times \cup \{0\}.$$

3.31 Bemerkung: Ein Element $\hat{\alpha} \in \mathbb{X}_K(L)^\times$ ist also eine Familie $(\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}(L|K)}$, wobei jedes $\alpha_E \in E$ ist, und für $E'|E$ innerhalb $\mathcal{E}(L|K)$ gilt $N_{E'|E}(\alpha_{E'}) = \alpha_E$.

3.32 Definition: Die **Bewertung** ν auf K kann auf $\mathbb{X}_K(L)$ fortgesetzt werden: Für $\hat{\alpha} \in \mathbb{X}_K(L)$ sei

$$\nu(\hat{\alpha}) := \nu_{L \cap K^{\mathrm{nr}}}(\alpha_{L \cap K^{\mathrm{nr}}}).$$

Für die sämtlich reinverzweigten Erweiterungen $E \in \mathcal{E}(L|L \cap K^{\mathrm{nr}})$ gilt dann auch $\nu(\hat{\alpha}) = \nu_E(\alpha_E)$. Ein Element $\hat{\pi}$ im Normenkörper $\mathbb{X}_K(L)$ heißt **Primelement**, falls $\nu(\hat{\pi}) = 1$, das heißt, für alle $E \in \mathcal{E}(L|L \cap K^{\mathrm{nr}})$ ist π_E Primelement.

3.33 Definition: Eine Körpererweiterung $L|K$ heißt **arithmetisch proendlich** (**APF**), falls die Gruppe $G_K^u G_L$ offen in G_K für alle $u \geq -1$ ist, wobei G_K^u die (höhere) Verzweigungsgruppe in der oberen Nummerierung bezeichne. Für die Fixkörper $K^u := \mathrm{Fix}(G_K^u)$ bedeutet das: $K^u \cap L|K$ ist endlich, insbesondere sind die maximal zahmverzweigte Teilerweiterung $L \cap K^1$ und die maximal unverzweigte Teilerweiterung $L \cap K^{\mathrm{nr}}$ von $L|K$ endliche Erweiterungen von K, also $f_{L|K} = [L \cap K^{\mathrm{nr}} : K] < \infty$.

3.34 Hilfssatz: Sei $M|L|K$ ein Körperturm. Mit $M|K$ ist auch $L|K$ APF. Ist $L|K$ endlich, so ist mit $M|K$ auch $M|L$ APF. Ist $M|L$ endlich, so ist mit $M|K$ auch $L|K$ APF.

3.35 Hilfssatz: Sei $L|K$ APF und $(\alpha_E), (\beta_E) \in \mathbb{X}_K(L)$. Dann konvergiert für alle $E \in \mathcal{E}(L|K)$ die Familie $(N_{E'|E}(\alpha_{E'} + \beta_{E'}))_{E'}$ entlang der Filtrierung $\mathcal{E}(L|E)$ (das heißt, $E' \in \mathcal{E}(L|E)$) gegen ein Element $\gamma_E =: \lim\limits_{E' \in \mathcal{E}(L|E)} N_{E'|E}(\alpha_{E'} + \beta_{E'}) \in E$, das heißt, für jedes $A \in \mathbb{N}$ ist $\nu(N_{E''|E}(\alpha_{E''} + \beta_{E''}) - \gamma_E) > A$ für alle endlichen $E''|E'$ und $E' \in \mathcal{E}(L|E)$ groß genug.

3.36 Satz: Sei $L|K$ APF, dann bildet die Menge $\mathbb{X}_K(L)$, versehen mit der komponentenweisen Multiplikation, der Operation $(\alpha_E)_E + (\beta_E)_E := (\gamma_E)_E$ als Addition und der obigen Bewertung ν, einen lokalen Körper der Charakteristik p, in dieser Arbeit also wieder einen p-adischen Körper positiver Charakteristik, das ist ein Laurentreihenkörper über dem Restkörper κ_L von L: $\mathbb{X}_K(L) \cong \kappa_L((X))$, das heißt, der Restkörper von $\mathbb{X}_K(L)$ identifiziert sich mit dem von L.

3.37 Definition: Dieser Körper $\mathbb{X}_K(L)$ heißt der **Normenkörper** der APF-Erweiterung $L|K$.

3.38 Satz: Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $G(\bar{L}|L) \cong G(\overline{\mathbb{X}_K(L)}|\mathbb{X}_K(L))$, und die Körper L und $\mathbb{X}_K(L)$ haben eine parallele Erweiterungstheorie:
Zunächst ist die Zuordnung $\mathbb{X}_K$ ein Funktor von der Kategorie der unendlichen APF-Erweiterungen L von K in die Kategorie der Normenkörper $\mathbb{X}_K(L)$.
Ferner gibt es für jede endliche separable K-Einbettung $\tau : L \to L'$ das in $\mathcal{E}(L'|K)$ kofinale System $\mathcal{E}_\tau := \{E' \in \mathcal{E}(L'|K) \mid \tau L E' = L' \text{ und } [L' : \tau L] = [E' : E' \cap \tau L]\}$ und die stetige, endlich separable Einbettung $\mathbb{X}_K(\tau) : \mathbb{X}_K(L) \to \mathbb{X}_K(L')$, $(\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}(L|K)} \mapsto (\beta_{E'})_{E' \in \mathcal{E}_\tau}$ mit $\beta_{E'} := \tau(\alpha_{\tau^{-1}E'}$, wobei $\tau^{-1}E' := \tau^{-1}(\tau L \cap E')$ das Urbild von E' in L sei. Diese führt auf die Gleichheit der Grade $[\mathbb{X}_K(L') : \mathbb{X}_K(\tau)(\mathbb{X}_K(L))]$ und $[L' : \tau L]$. Ferner ist mit $L'|\tau L$ auch $\mathbb{X}_K(L')|\mathbb{X}_K(\tau)(\mathbb{X}_K(L))$ galoissch und $\sigma \mapsto \mathbb{X}_K(\sigma)$ ergibt einen Isomorphismus der

zugehörigen Galoisgruppen.
Schließlich wird eine beliebige separable Erweiterung $M|L$ als Vereinigung $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ der endlichen separablen Teilerweiterungen gesehen und bezüglich der aus den K-Einbettungen $\iota : M_i \to M_j$ erhaltenen K-Einbettungen $\mathbb{X}_K(\iota) : \mathbb{X}_K(M_i) \to \mathbb{X}_K(M_j)$ für endliche separable Teilerweiterungen M_i, M_j von $M|L$ der direkte Limes

$$\mathbb{X}_{L|K}(M) := \varinjlim_{i \in I} \mathbb{X}_K(M_i) = \varinjlim_{L' \in \mathcal{E}(M|L)} \mathbb{X}_K(L')$$

gebildet. Für eine separable Erweiterung $X|\mathbb{X}_K(L)$ gibt es dann immer eine ebensolche $M'|L$ so, dass ein $\mathbb{X}_K(L)$-Isomorphismus zwischen $\mathbb{X}_{L|K}(M')$ und X' existiert. Es ergibt sich die Isomorphie $G(L^{\text{sep}}|L) \cong G(\mathbb{X}_K(L)^{\text{sep}}|\mathbb{X}_K(L))$, dabei gilt $G(L^{\text{sep}}|M) \cong G(\mathbb{X}_K(L)^{\text{sep}}|\mathbb{X}_{L|K}(M))$ für separable Erweiterungen $M|L$.

3.6 Aus der Lubin-Tate-Theorie

In diesem Abschnitt werden einige Fakten zusammengetragen, die zum Beispiel in [Neu92] oder [Iwa86] behandelt werden. Parallel wird der sogenannte K_0-Fall (Definition 3.49) begonnen, der in den Kapiteln 5 und 6 benutzt wird.

3.39 Definition: Eine **formale Gruppe** bzw. ein **formales Gruppengesetz** $+_F$ über einem Ring $\mathcal{O}$ ist eine formale Potenzreihe $F(X) \in \mathcal{O}[[X, Y]]$ mit den Eigenschaften

(i) $F(X, Y) = X + Y \bmod \text{Grad } 2$,

(ii) $F(X, Y) = F(Y, X)$ "Kommutativität",

(iii) $= F(X, F(Y, Z)) = F(F(X, Y), Z)$ "Assoziativität".

Es folgt $F(0, 0) = 0$, $F(X, 0) = F(0, X) = X$, $F(X, Y) = X + Y + XYG(X, Y) = X + Y + \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij} X^i Y^j$.

3.40 Bemerkung: Ist $\mathcal{O}$ ein vollständiger Bewertungsring und $\mathcal{P}$ sein maximales Ideal, dann liefert die Potenzreihe F auf der Menge $\mathcal{P}$ eine neue kommutative Gruppenstruktur: $x +_F y := F(x, y)$ (zusätzlich zu der des Körpers K).

3.41 Definition: Eine Potenzreihe $f(X) = a_1 X + a_2 X^2 + \ldots \in \mathcal{O}[[X]]$ heißt **Homomorphismus** $f : F \to G$ **formaler Gruppen**, falls $f(F(X, Y)) = G(f(X), f(Y))$. Ein solcher heißt **Isomorphismus**, falls $a_1 \in \mathcal{O}^\times$, dann gibt es einen Homomorphismus $g : G \to F$ mit $f(g(X)) = g(f(X)) = X$, und er hat die Form $g(X) = a_1^{-1} X + \ldots$.

3.42 Bemerkung: Die Homomorphismen $f : F \to F$ bilden den Ring $\text{End}_{\mathcal{O}}(F)$ bezüglich der formalen Addition $(f_1 +_F f_2)(X) := F(f_1(X), f_2(Y))$ und der Hintereinanderausführung $(f_1 \circ f_2)(X) := f_1(f_2(X))$.

3.43 Definition: Eine formale Gruppe F über $\mathcal{O}$ zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\mathcal{O} \to \text{End}_{\mathcal{O}}(F)$, $a \mapsto [a]_F(X)$ mit $[a]_F(X) \equiv aX \mod \deg 2$ heißt **formaler $\mathcal{O}$-Modul**. Also muss $1 \in \mathcal{O}$ auf die Potenzreihe $[1]_F(X) = X$, das ist das neutrale Element der Hintereinanderausführung, abgebildet werden.

Sei K ein lokaler Körper, $\mathcal{O}_K$ sein Bewertungring, $\mathcal{P}_K$ sein Bewertungsideal, $U(K) = \mathcal{O}_K^\times$ die Einheitengruppe, $\kappa_K := \mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$ der Restkörper, $q := \#\kappa_K$ dessen Ordnung, also $\kappa_K \cong \mathbb{F}_q$. Sei φ die stetige Fortsetzung des K-Frobenius auf die Vervollständigung $\tilde{K} := \widehat{K^{\mathrm{nr}}}$.

3.44 Definition: Sei $\pi \in K$ Primelement. Ein formaler $\mathcal{O}_K$-Modul F heißt **Lubin-Tate-Modul zu** π, falls

$$[\pi]_F \equiv X^q \bmod \pi.$$

3.45 Definition: Sei $\pi \in \tilde{K}$ ein Primelement. Eine Potenzreihe $l \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ heißt **Lubin-Tate-Potenzreihe zu** π, falls

(i) $l(X) \equiv \pi X \bmod \deg 2$ und

(ii) $l(X) \equiv X^q \bmod \pi$.

Die Menge dieser Lubin-Tate-Potenzreihen sei mit $\mathfrak{F}(\tilde{K}, \pi, q)$ bezeichnet. Die unter diesen Potenzreihen befindlichen Polynome heißen entsprechend **Lubin-Tate-Polynome**.

3.46 Bemerkung: Ist das Primelement π bereits in K^f, so kann man K^f als Grundkörper mit $(K^f)^{\mathrm{nr}} = K^{\mathrm{nr}}$ ansehen, und hat die Menge $\mathfrak{F}(K^f, \pi, q^f) \subset \mathfrak{F}(\tilde{K}, \pi, q^f)$. Ist $\pi \in K \subseteq K^f$, kann man wiederum $\mathfrak{F}(K, \pi, q^f) \subseteq \mathfrak{F}(K^f, \pi, q^f)$ betrachten, nicht zu verwechseln mit $\mathfrak{F}(K, \pi, q)$, wo K selbst Grundkörper ist.

3.47 Hilfssatz ([Iwa86] Proposition 3.12, vgl. [Neu92] V.(2.2)): Seien π_1 und π_2 Primelemente in $\tilde{K}$, ferner $l_1 \in \mathfrak{F}(\tilde{K}, \pi_1, q)$ und $l_2 \in \mathfrak{F}(\tilde{K}, \pi_2, q)$ Lubin-Tate-Potenzreihen. Sei $L(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ eine Linearform mit Koeffizienten $a_i \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}$ und $\pi_1 L(X_1, \ldots, X_n) = \pi_2 L^\varphi(X_1, \ldots, X_n)$.
Dann gibt es eine einzige Potenzreihe $F(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X_1, \ldots, X_n]]$ mit

$$F(X_1, \ldots, X_n) \equiv L(X_1, \ldots, X_n) \bmod \deg 2,$$

$$l_1(F(X_1, \ldots, X_n)) = F^\varphi(l_2(X_1), \ldots, l_2(X_n)).$$

Liegen die Koeffizienten von l_1, l_2 und L (also insbesondere π_1 und π_2 als X-Koeffizient in l_1 bzw. l_2) in einem vollständigen Teilring $\mathcal{O}$ von $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$ mit $\mathcal{O}^\varphi = \mathcal{O}$ (nicht unbedingt elementweise), so hat auch F Koeffizienten in $\mathcal{O}$.

3.48 Folgerung: Wenn $\pi \in K$ Primelement, $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$ und $L(X_1, \ldots, X_n)$ Linearform mit Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$ ist, dann hat auch die eindeutig bestimmte Potenzreihe $F(X_1, \ldots, X_n)$ des Hilfssatzes 3.47 bereits Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$. Liegen die Koeffizienten von l und L in einem vollständigen Teilring $\mathcal{O}$ von $\mathcal{O}_K$, so hat auch F Koeffizienten in $\mathcal{O}$.
Beweis: Die Koeffizienten von l und L liegen im vollständigen Teilring $\mathcal{O}_K$ von $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$ und $\mathcal{O}_K^\varphi = \mathcal{O}_K$ (sogar elementweise), also ist die letzte Aussage des Hilfssatzes 3.47 anwendbar, und F hat Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$. In einem vollständigen Teilring $\mathcal{O}$ von $\mathcal{O}_K$ gilt erst recht $\mathcal{O}^\varphi = \mathcal{O}$, also ist wieder die letzte Aussage des Hilfssatzes 3.47 anwendbar, und F hat Koeffizienten in $\mathcal{O}$. $\square$

3.49 Definition: Letztere Fälle werden immer wieder betrachtet: Wenn $\pi \in K$ Primelement, $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$, L und somit auch F Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$ hat, wobei φ auf K trivial operiert, diese Situation heiße der ***K*-Fall**.
Sei $K_0 \subseteq K$ ein solcher Teilkörper, dass $K|K_0$ endlich unverzweigt ist, also K_0 ein lokaler Körper mit Restkörper κ_0 der Ordnung q_0 mit $q = q_0^{f_0}$, wobei $f_0 := [K : K_0]$ ist. Dann ist $\mathcal{O}_{K_0}$ in $\mathcal{O}_K$ und $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$ ein vollständiger Teilring. Ferner ist die endliche Erweiterung $K|K_0$ algebraisch, also $\bar{K} = \bar{K}_0$. Das Primelement π von K liege bereits in K_0. Wegen der Unverzweigtheit gilt $K^{\mathrm{nr}} = K_0^{\mathrm{nr}}$, und jedes Primelement π von K_0 ist auch Primelement von K. Die Lubin-Tate-Potenzreihe l habe Koeffizienten in K_0, sei jedoch nicht in $\mathfrak{F}(K_0, \pi, q_0)$, sondern gehöre zu $\mathfrak{F}(K_0, \pi, q) \subseteq \mathfrak{F}(K, \pi, q)$. Diese Situation heiße der **K_0-Fall**.

3.50 Folgerung: Im K_0-Fall hat die eindeutig bestimmte Potenzreihe des Hilfssatzes 3.47 auch Koeffizienten in $\mathcal{O}_{K_0}$.

3.51 Folgerung ([Iwa86] Proposition 4.2., vgl. [Neu94] S. 361): Sei $\pi_1 = \pi_2 =: \pi \in \tilde{K}$, $l_1 = l_2 =: l \in \mathfrak{F}(\tilde{K}, \pi, q)$ und $L(X, Y) := X + Y$. Dann bestimmt l nach Hilfssatz 3.47 eine einzige Potenzreihe $F(X, Y) \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X, Y]]$ mit

$$F(X, Y) \equiv X + Y \bmod \deg 2 \text{ und } l(F(X, Y)) = F^{\varphi}(l(X), l(Y)).$$

Diese ist ein formales Gruppengesetz und wird mit F_l bezeichnet. Damit ist l ein Homomorphismus von F_l nach F_l^{φ}. Im K-Fall hat F_l nach der letzten Aussage von Hilfssatz 3.47 Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$, und l ist ein Endomorphismus von F_l: $l(F_l(X, Y)) = F_l(l(X), l(Y))$. Im K_0-Fall hat F_l nach Folgerung 3.50 Koeffizienten in $\mathcal{O}_{K_0}$.

3.52 Folgerung ([Iwa86] Proposition 4.4.): Seien $\pi_1, \pi_2 \in \tilde{K}$ Primelemente, $l_1 \in \mathfrak{F}(\tilde{K}, \pi, q)$, $l_2 \in \mathfrak{F}(\tilde{K}, \pi, q)$, $a \in \mathcal{O}_K$ (nicht in $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$) und $L(X) := aX$. Die nach Hilfssatz 3.47 eindeutig bestimmte Potenzreihe $F(X) \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ mit

$$F(X) \equiv aX \bmod \deg 2,$$

$$l_1(F(X)) = F^{\varphi}(l_2(X))$$

wird mit $[a]_{l_1,l_2}$ bezeichnet, im Fall $l_1 = l_2 =: l$ mit $[a]_l$.
Für $l_1 = l_2 =: l$ ist $a \mapsto [a]_l =: [a]_{F_l}$ ein injektiver Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_K \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}(F_l)$.
Im K-Fall mit $l_1 = l_2 =: l$ ist das eine formale $\mathcal{O}_K$-Modul-Struktur auf F_l.

3.53 Hilfssatz: Im K_0-Fall ist die Teilmenge der Endomorphismen, die zu den Elementen $a \in \mathcal{O}_{K_0}$ gehören, ein Teilring in $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{K_0}}(F_l) \subseteq \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F_l)$.
Beweis: Geht man von einem Element a in $\mathcal{O}_{K_0}$ aus, so haben l und $L(X) := aX$ Koeffizienten in dem vollständigen Teilring $\mathcal{O}_{K_0}$, nach Folgerung 3.50 also auch $[a]_l$. Für $a_1, a_2 \in \mathcal{O}_{K_0}$ haben mit F_l, $[a_1]_l$ und $[a_2]_l$ auch die Potenzreihen $[-a_2]_l$, $[a_1 - a_2]_l = [a_1]_l +_l [-a_2]_l = F_l([a_1]_l, [-a_2]_l)$ und $[a_1a_2]_l = [a_1]_l \circ [a_2]_l$ Koeffizienten in $\mathcal{O}_{K_0}$. □

3.54 Bemerkung: Sei $\pi \in K$. Bei einem Lubin-Tate-Modul F zu π (formaler $\mathcal{O}_K$-Modul) ist $[\pi]_F \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$. Umgekehrt ergibt für jedes $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$ der formale $\mathcal{O}_K$-Modul F_l einen Lubin-Tate-Modul zu π. Es gilt $[\pi]_l(X) \equiv \pi X \bmod \deg 2$ und $l \circ [\pi]_l = [\pi]_l \circ l$, also wegen der Eindeutigkeit in Hilfssatz 3.47 $[\pi]_l(X) = l$, damit ist F_l ein Lubin-Tate-Modul.

3.55 Folgerung ([Iwa86] Proposition 4.5., vgl. [Neu94] Korollar 2.3): Seien $\pi_1,\ \pi_2\ \in\ \tilde{K}$ Primelemente, $l_1\ \in\ \mathfrak{F}(\tilde{K},\pi,q)$ und $l_2\ \in\ \mathfrak{F}(\tilde{K},\pi,q)$. Die Folge $1 \to U(K) \to U(\tilde{K}) \overset{\varphi-1}{\to} U(\tilde{K}) \to 1$ ist exakt, insbesondere ist $\varphi - 1$ surjektiv. Da $\frac{\pi_2}{\pi_1} \in U(\tilde{K})$, gibt es also ein $\eta := (\frac{\pi_2}{\pi_1})^{\varphi-1} \in U(\tilde{K})$. Die nach Hilfssatz 3.47 für und $L(X) := \eta X$ eindeutig bestimmte Potenzreihe $F(X) \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ mit

$$F(X) \equiv \eta X \bmod \deg 2,$$

$$l_2(F(X)) = F^{\varphi}(l_1(X))$$

wird mit θ bezeichnet. Da $\eta \in U(\tilde{K})$ ist die Potenzreihe θ invertierbar in $X \cdot \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ und ist ein Isomorphismus $F_{l_1} \to F_{l_2}$. Außerdem hat $\theta(X)$ die Eigenschaft $[a]_{l_1}^{\theta} = [a]_{l_2}$, das heißt, $\theta \circ [a]_{l_1} = [a]_{l_2} \circ \theta$, für alle $a \in \mathcal{O}_K$.

3.56 Folgerung: Auch im Fall $\pi_1, \pi_2 \in K$ wird η im allgemeinen in $U(\tilde{K})$ sein, also der Isomorphismus θ Koeffizienten in $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$ haben, jedoch: Im K-Fall mit $\pi_1 = \pi_2 =: \pi$ ist $\eta = 1 \in K$, damit hat θ Koeffizienten in K, und es gilt $l_1 \circ \theta = \theta \circ l_2$. Im K_0-Fall mit $\pi_1 = \pi_2 =: \pi$ spielt sich wiederum nach Folgerung Folgerung 3.50 alles im vollständigen Teilring $\mathcal{O}_{K_0}$ ab.

Ab jetzt wird nur noch der K-Fall betrachtet: Sei $\pi \in K$ und $l \in \mathfrak{F}(K,\pi,q)$. Die Menge $\overline{\mathcal{P}} := \mathcal{P}_{\overline{K}}$ bekommt mit den Operationen $+_{F_l}$ und $\mathcal{O}_K \times \overline{\mathcal{P}} \ni (a,x) \mapsto a \cdot x := [a]_{F_l}(x)$ eine (echte) $\mathcal{O}_K$-Modul-Struktur.

3.57 Definition: Sei $l \in \mathfrak{F}(K,\pi,q)$, und $l^{(n)} := \underbrace{l \circ \ldots \circ l}_{n-\text{mal}}$. Die Menge

$$W_l^n := \{x \in \overline{\mathcal{P}} \mid l^{(n)}(x) = 0\}$$

heißt Gruppe der **π^n-ten Teilungspunkte**, kurz: **n-ten Teilungspunkte**. (Hinweis: Im Vergleich zu [Iwa86] ist n um eins verschoben.) Wegen $[\pi^n]_{F_l} = l^{(n)}$ gilt $W_l^n = \ker[\pi^n]_{F_l}$, also ist das eine Untergruppe von $\overline{\mathcal{P}}$ bezüglich der Gruppenoperation $+_{F_l}$: In üblicher Weise gilt für $x, y \in W_l^n$: $[\pi^n]_{F_l}(x +_{F_l} y) = [\pi^n]_{F_l}(F_l(x,y)) = F_l([\pi^n]_{F_l}(x), [\pi^n]_{F_l}(y)) = F_l(0,0) = 0$. Die Teilungspunkte $w_n \in \tilde{W}_l^n := W_l^n - W_l^{n-1}$ heißen **primitiv**.

3.58 Definition: Sei $l \in \mathfrak{F}(K,\pi,q)$. Der $\mathcal{O}_K$-Modul

$$T_l := \varprojlim_n W_l^n$$

mit den Übergangsabbildungen $l : W_l^n \to W_l^{n-1}$ heißt **Tatemodul** der Lubin-Tate-Potenzreihe l. Ein aus primitiven Teilungspunkten w_n bestehendes Element $(w_n)_n \in T_l$ heißt **Erzeuger** des Tatemoduls.

3.59 Definition: Eine Lubin-Tate-Potenzreihe $l \in \mathfrak{F}(K,\pi,q)$ heißt **normisch**, falls die Erzeuger $(w_n)_n$ des Tatemoduls T_l normisch sind in dem Sinne, dass $N_{K_{n+1}|K_n)}(w_{n+1}) =$

w_n für alle $n \geq 1$ und $N_{K(w_1)|K}(w_1) = \pi$. Die Teilmenge der normischen Lubin-Tate-Potenzreihen in $\mathfrak{F}(K, \pi, q)$ wird mit $\mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q)$ bezeichnet.

3.60 Definition: Der Körper $K_n := K(W_l^n)$ ist eine reinverzweigte abelsche Erweiterung von K vom Grad $q^{n-1}(q-1)$. Er hängt von der Wahl von π, nicht aber der von l ab. Ist l ein Lubin-Tate-Polynom, und $w_n \in \tilde{W}_l^n$, dann ist w_n ein Primelement in $K_n = K(w_n)$ und $N_{K_n|K}(-w_n) = \pi$, und π ist universelle Norm der Erweiterung $K_n|K$. Der Körper K_n hat die Galoisgruppe $G(K_n|K) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_K}(W_l^n) \cong U_K/U_K^n$ ($U_K^n := 1 + \pi^n\mathcal{O}_K$) und ist der Klassenkörper der Normengruppe $N_{K_n|K}(K_n^\times) = \langle\pi\rangle \times U_K^n \subset K^\times$. Die Körper K_n bilden eine aufsteigende Folge und heißen **n-te Teilungskörper** oder **Lubin-Tate-Erweiterungen**.
Der Körper $K_\pi = \bigcup_n K_n$ ist die maximal abelsche reinverzweigte Erweiterung von K mit universeller Norm π: $K^{\mathrm{ab}} = K^{\mathrm{nr}}K_\pi$. Er ist der Klassenkörper der Normengruppe $N_{K_\pi|K}(K_\pi^\times) = \langle\pi\rangle \subset K^\times$. Er hängt von der Wahl von π, nicht aber der von l ab.

3.7 Beschreibung von Fasern im Fall $n = 1$

3.61 Bemerkung: Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(K^{n*}|K)$ und

$$\mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K)_{\mathfrak{p}} := \{\mathfrak{P} \in \mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K) \mid \mathfrak{P}|_{K^{n*}} = \mathfrak{p}\}$$

dessen Faser unter der Übergangsabbildung aus Bemerkung 3.25 für relative Mikroprimstellen innerhalb des Turms der Körper K^{n*}. Dann gilt

$$\mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K) = \dot{\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(K^{n*}|K)}} \mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K)_{\mathfrak{p}} \text{ (disjunkte Vereinigung)},$$

und eine solche Faser soll nun im Fall $n = 1$ einzeln beschrieben werden.
Es sei $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{spec}(K^{1*}|K)$ fest gewählt. Es wird eine Beschreibung eines Subquotienten der Faser $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$ in Termen normischer Lubin-Tate-Potenzreihen gegeben. Die Hauptidee ist, die Frobeniuskörper $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}_1}$ durch APF-Erweiterungen anzunähern.

3.62 Definition: Die Erweiterung $K^{1*}|K$ ist lokal unverzweigt, und die Mikroprimstelle $\mathfrak{p}_1$ entspricht nach Folgerung 3.29 einer $G(K^{1*}|K)$-Konjugationsklasse von minimalen Frobeniuskörpern $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}_1}$ in K^{1*} und via der Bijektion $\mathrm{spec}(K^{1*}|K) \leftrightarrow G(K^{\mathrm{nr}}|K) \setminus \mathscr{P}(K^{\mathrm{nr}})$ einer Konjugationsklasse von Primelementen, weshalb man $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]} := \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$ setzen kann. Dabei sei π ein gewähltes Primelement aus der zugehörigen Konjugationsklasse, ferner $\mathcal{F}_\pi \in K^{1*}$ ein gewählter, den Körper $M := K(\pi)$ umfassender, minimaler Frobeniuskörper aus $\mathfrak{p}_1$. Damit hat man $M = \mathcal{F}_\pi \cap K^{\mathrm{nr}}$, und $\mathcal{F}_\pi$ ist ein festes Komplement zu K^{nr} innerhalb der Erweiterung $K^{1*}|M$.

3.63 Definition: Für $f \geq 1$ sei $M^f|M$ die unverzweigte Erweiterung vom Grad f und M_π^f die maximal abelsche reinverzweigte Erweiterung von M^f mit universeller Norm π. Es bezeichne

$$\mathcal{F}_\pi(f) := \mathcal{F}_\pi \cap M_\pi^f,$$

dieser Körper schöpft für wachsendes f den Körper $\mathcal{F}_\pi$ aus, genau wie M_π^f und $\mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}}$

den Körper K^{1*}. Wie die endliche unverzweigte Verschiebung $M^f_\pi|M^f$ ist $\mathcal{F}_\pi(f)|M$ reinverzweigt und APF, letztere jedoch für $f > 1$ nicht abelsch, sei diese Situation fastabelsch genannt. Außerdem ist $\mathcal{F}_\pi(f)^{0*} = \mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}} = (M^f_\pi)^{\mathrm{nr}} = (M^f_\pi)K^{\mathrm{nr}} = (M^f_\pi)(M^f)^{\mathrm{nr}} = (M^f)^{\mathrm{ab}}$, die maximal abelsche Erweiterung von M^f, da sie das Kompositum aus der maximal abelsch reinverzweigten Erweiterung $M^f_\pi|M^f$ und der maximal (abelsch) unverzweigten Erweiterung $(M^f)^{\mathrm{nr}}|M^f$ ist.

$$\begin{tikzcd}
 & & & K^{2*} \\
 & & & \mathcal{F}_\pi(f)^{1*} = (M^f_\pi)^{1*} \arrow[u, "f\to\infty"'] \\
 & \mathcal{F}_\pi \arrow[rr, dash] & & K^{1*} \arrow[u, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi(f) \arrow[u, "f\to\infty"] \arrow[r, dash] & M^f_\pi \arrow[ur, "f\to\infty"] \arrow[r, dash] & (M^f)^{\mathrm{ab}} = \mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}} \arrow[u, dash] \\
K \arrow[r, dash] & M = K(\pi) \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] & M^f \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] & K^{\mathrm{nr}} = K^{0*} \arrow[u, dash]
\end{tikzcd}$$

Aus $K^{1*} = \bigcup\limits_{f\geq 1} M^f_\pi$ folgt $\mathcal{F}_\pi = \bigcup\limits_{f\geq 1} \mathcal{F}_\pi(f)$, ferner wegen $(M^f_\pi)^{1*} = \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$, dass $K^{2*} = \bigcup\limits_{f\geq 1} \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$.
$\mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}} = (M^f)^{\mathrm{ab}}$ ist abelsch über M^f, welches unverzweigt über K ist. Also ist $\mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}} = \mathcal{F}_\pi(f)^{0*}|K$ normal, damit auch $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K$.

3.64 Bemerkung: Der minimale Frobeniuskörper $\mathcal{F}_\pi$ hat nach Folgerung 3.23 nur den trivialen K-Automorphimus. Der Körper $\mathcal{F}_\pi(f)$ ist ein minimaler Frobeniuskörper in $\mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}}|K$: Angenommen $X \subset \mathcal{F}_\pi(f)$ mit $X \supset K$ ist unverzweigt, dann ist die universelle Norm n der Erweiterung $X|X \cap K^{\mathrm{nr}}$ auch in $X \cap K^{\mathrm{nr}} \subseteq M = K(\pi)$ und auch universelle Norm von $\mathcal{F}_\pi(f)|M$. Also ist $n = \pi$ und $X \cap K^{\mathrm{nr}} = M$, damit $X = \mathcal{F}_\pi(f)$. Trotzdem hat er nichttriviale Automorphismen, das heißt, $d_K : G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K) \to \hat{\mathbb{Z}}$ ist nicht lokal unverzweigt. Ein K-Automorphismus von $\mathcal{F}_\pi(f)$ lässt die universelle Norm π der Erweiterung $\mathcal{F}_\pi(f)|K$, und damit den Körper $M = K(\pi)$ fest. Also ist die Injektion $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_\pi(f)|M) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{F}_\pi(f)|K)$ bereits eine Bijektion.

3.65 Bemerkung: Man bezeichnet die Menge der Mikroprimstellen, die unter

$$\mathrm{spec}(K) \to \mathrm{spec}(K^{1*}|K) \leftrightarrow G(K^{\mathrm{nr}}|K) \setminus \mathscr{P}(K^{\mathrm{nr}})$$

auf $[\pi]$ abgebildet werden, mit $\mathrm{spec}(K)_{[\pi]}$. Nach 1.13 hat man die surjektive Abbildung $\mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi) \to \mathrm{spec}(K)$. Dagegen muss die Abbildung $\mathrm{spec}_0(\mathcal{F}_\pi) \to \mathrm{spec}(K)$ nicht mehr surjektiv sein. Nun beginnt man mit einer diskreten Mikroprimstelle $\mathfrak{P}$ der unendlichen, f-endlichen Erweiterung $\mathcal{F}_\pi|K$. Das bedeutet in Termen der Frobeniuselemente, dass $\mathfrak{P} \cap G_{\mathcal{F}_\pi} \neq \emptyset$, in Termen der Frobeniuskörper, dass ein $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}$ mit $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_\pi$ existiert.
Also gilt bei der Abbildung $\mathrm{spec}_0(\mathcal{F}_\pi) \to \mathrm{spec}(K^{1*}|K)$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \cap K^{1*}$ immer $\mathcal{F} \cap K^{1*} \supset \mathcal{F}_\pi$,

somit landet man in der Äquivalenzklasse von $\mathcal{F}_\pi$, das heißt, das Bild liegt in $\operatorname{spec}(K)_{[\pi]}$, und es ergibt sich die Surjektion $\operatorname{spec}_0(\mathcal{F}_\pi) \to \operatorname{spec}(K)_{[\pi]}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{F} \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & \bar{K} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F} \cap K^{1*} \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & K^{1*} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi(f) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M_\pi^f \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}} = (M_\pi^f)^{\mathrm{nr}} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash, bend right, "f_\pi"'] & M = K(\pi) \arrow[r, dash] \arrow[rr, dash, bend right, "f"'] & \mathcal{F} \cap K^{\mathrm{nr}} \arrow[r, dash] & M^f \arrow[r, dash] & K^{\mathrm{nr}} = K^{0*}
\end{tikzcd}$$

Wegen $[\mathcal{F}\cap K^{\mathrm{nr}} : \mathcal{F}_\pi \cap K^{\mathrm{nr}}] \cdot [\mathcal{F}_\pi \cap K^{\mathrm{nr}} : K] = [\mathcal{F}\cap K^{\mathrm{nr}} : \mathcal{F}_\pi \cap K^{\mathrm{nr}}] \cdot f_\pi = [\mathcal{F}\cap K^{\mathrm{nr}} : K]$ wird dabei von links nach rechts der Grad der Mikroprimstellen mit f_π multipliziert. Es ergibt sich die Surjektion $\operatorname{spec}_0(\mathcal{F}_\pi)[f] \twoheadrightarrow \operatorname{spec}(K)_{[\pi]}[f]$. Dabei meint man links Mikroprimstellen, der Grad f teilt, und rechts Mikroprimstellen $\mathfrak{p}$, deren Relativgrad $\deg(\mathfrak{p})/f_\pi$ das f teilt. Dass die Surjektion eine Bijektion ist, sieht man genau wie in:

3.66 Hilfssatz ([Meh03] Lemma 7.1): Die Inklusion $G(K^{(n+1)*}|\mathcal{F}_\pi) \subset G(K^{(n+1)*}|K)$ induziert eine natürliche Bijektion

$$\operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{(n+1)*}|\mathcal{F}_\pi) \leftrightarrow \operatorname{spec}_0(K^{(n+1)*}|\mathcal{F}_\pi) \leftrightarrow \operatorname{spec}(K^{(n+1)*}|K)_{[\pi]},$$

wobei rechts Mikroprimstellen gemeint sind, die unter $\operatorname{spec}(K^{(n+1)*}|K) \to \operatorname{spec}(K^{1*}|K) \leftrightarrow G(K^{\mathrm{nr}}|K) \setminus \mathscr{P}(K^{\mathrm{nr}})$ auf $[\pi]$ abgebildet werden.

Beweis: Die erste Bijektion ist die Bijektion für Mikroklassen, die zweite ist die surjektive Vergröberung der Mikroklassen, die jedoch hier injektiv ist: Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ zwei $\mathcal{F}_\pi$ umfassende Frobeniuskörper in $K^{(n+1)*}$, ferner $\sigma \in G_K$ so, dass $\sigma(\mathcal{F})\mathcal{F}'$ ein Frobeniuskörper in $K^{(n+1)*}$ ist. Dann ist $\sigma(\mathcal{F})\mathcal{F}' \cap K^{1*}$ ein Frobeniuskörper in K^{1*}, der die beiden minimalen Frobeniuskörper $\mathcal{F}_\pi$ und $\sigma(\mathcal{F}_\pi)$ enthält. Da $d : G(K^{1*}|K) \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt ist, ist nur ein einziger minimaler Frobeniuskörper enthalten, also $\mathcal{F}_\pi = \sigma(\mathcal{F}_\pi)$. Nach Folgerung 3.23 ist $\mathcal{F}_\pi = \operatorname{Fix}(\sigma)$ wegen der Minimalität von $\mathcal{F}_\pi$. $\square$

3.67 Hilfssatz ([Meh03] Lemma 7.2.): Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G(M_\pi^f|M) \setminus \operatorname{spec}_0(M_\pi^f)[1] \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{spec}(M)_\pi[f] \arrow[d] \\
\sim \setminus \operatorname{spec}_0(\mathcal{F}_\pi(f))[f] \arrow[r] \arrow[ur] & \operatorname{spec}(K)_{[\pi]}[f].
\end{tikzcd}$$

Alle Mikroprimstellen sind Mikroklassen. Die Abbildungen sind induziert von der Identität der Frobeniuskörper, also den Vergröberungsabbildungen aus 1.13. Mit $\operatorname{spec}(K)_{[\pi]}[f]$ ist dabei die Teilmenge der Mikroprimstellen $\mathfrak{P}$ bezeichnet, deren Relativgrad $\frac{\deg(\mathfrak{P})}{f_\pi}$ die Zahl

f teilt. Die Äquivalenzrelation unten links ist die tautologische, das heißt diejenige, welche die Surjektion $\mathrm{spec}_0(\mathcal{F}_\pi(f))[f] \twoheadrightarrow \mathrm{spec}(K)_{[\pi]}[f]$ zur Bijektion macht. Damit sind alle Abbildungen Bijektionen, insbesondere ([MZ05] Lemma 6.1)

$$G(M_\pi^f|M) \setminus \mathrm{spec}_0(M_\pi^f)[1] \leftrightarrow G(M_\pi^f|M) \setminus \mathrm{spec}_{M_\pi^f}(M_\pi^f)[1] \leftrightarrow \mathrm{spec}(K)_{[\pi]}[f], \tag{3.1}$$

und wendet das Diagramm auf die Quotientengruppe $G(M_\pi^f)^{1*}|K)$ an ([Meh03] S. 54 Mitte)

$$\begin{tikzcd}
G(M_\pi^f|M) \setminus \mathrm{specc}_0((M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f)[1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{specc}((M_\pi^f)^{1*}|M)_\pi[f] \arrow[d] \\
\sim \backslash \mathrm{specc}_0(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[f] \arrow[r] \arrow[ur] & \mathrm{specc}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[f].
\end{tikzcd}$$

Das ist ein Diagramm von Bijektionen für Mikroklassen.

3.68 Hilfssatz ([MZ05] Lemma 6.3): Es sei $A \subset G := G((M_\pi^f)^{1*}|K)$ eine abgeschlossene abelsche Gruppe, die ein Frobeniuselement $\varphi \in H := G((M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f)$ enthält. (Bei der lokalen Unverzweigtheit soll A offenes Bild $d(A) \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ haben, das heißt, $d(A) = a\hat{\mathbb{Z}}$, somit soll A ein Frobeniuselement $\varphi \in G$ enthalten.) Dann ist $A \cap I_K = \{1\}$, also A prozyklisch.
Beweis: Die Menge $A_H := A \cap H$ ist eine abgeschlossene abelsche Untergruppe von H, und das Frobeniuselement φ ist auch in A_H. Da $d_{M_\pi^f} : H \to \hat{\mathbb{Z}}$ nach Hilfssatz 1.35 lokal unverzweigt ist, folgt $A_H \cap I_H = A \cap H \cap I_K = \{1\}$. Ferner gilt $H_0 := G((M_\pi^f)^{1*}|K^{1*}) \subset H \cap I_K$, also $A \cap H_0 = \{1\}$.
Die Abbildung $d_K : G(K^{1*}|K) = G/H_0 \to \hat{\mathbb{Z}}$ ist lokal unverzweigt. Da A abgeschlossen im Kompaktum $G((M_\pi^f)^{1*}|K)$ ist, ist A kompakt. Daher ist das Bild $\overline{A} := AH_0 \in G/H_0$ kompakt in einem Hausdorffraum, also eine abelsche Untergruppe. Diese enthält das Frobeniuselement φH_0, denn $d_K(\varphi H_0) = d_K(\varphi) = f_{K(\pi)|K} d_{M_\pi^f}(\varphi) \in \mathbb{N}$. Also ist $\overline{A} \cap \overline{I_K} = \{1\}$, das heißt, $AH_0 \cap I_K \subseteq H_0$, durch Schnitt mit A somit $A \cap I_K \subseteq A \cap H_0 = \{1\}$. $\square$

3.69 Folgerung ([MZ05] Lemma 6.3): Die von der Abbildung

$$\mathrm{spec}_{M_\pi^f}((M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f) \to \mathrm{spec}((M_\pi^f)^{1*}|K).$$

erreichten Mikroprimstellen sind in $\mathrm{frob}((M_\pi^f)^{1*}|K)$ abgeschlossene Mikroklassen.
Beweis: Sei $\mathfrak{p} := \overline{(\varphi)_K}$ eine Mikroprimstelle im Bild der Abbildung, wobei $\varphi \in H$ ein Frobeniuselement. Sei $G' := \{\sigma \in G \mid (\sigma\varphi\sigma^{-1})_{\bar{k}} = (\varphi)_{\bar{k}}\}$.
Es gilt $\varphi \in G'$. Sei $\sigma \in G' \cap I_K$. Dann muss $\sigma\varphi^a\sigma^{-1} = \varphi^b$ sein, somit $a = b$, und für die abgeschlossene abelsche Gruppe $A := \overline{\langle\sigma, \psi\rangle}$, wobei $\psi := \varphi^a \in H$ Frobeniuselement, gilt nach dem vorigen Lemma $A \cap I_K = \{1\}$, also $\sigma = 1$. Somit ist $G' \cap I_K = \{1\}$, also $d_K : G' \to \hat{\mathbb{Z}}$ injektiv mit offenem Bild.
Demnach ist $G' = \psi^{\hat{\mathbb{Z}}}$ mit einem Frobeniuselement $\psi \in G$. Ferner ist $(\varphi)_{\bar{k}} \subset G'$, weil aus $\varphi_1 \sim_{\bar{k}} \varphi$, das heißt, $\varphi_1^a = \varphi^b$, bereits $\varphi_1\varphi\varphi_1^{-1} \sim \varphi_1\varphi^b\varphi_1^{-1} = \varphi_1\varphi_1^a\varphi_1^{-1} = \varphi_1^a = \varphi^b \sim \varphi$, also $\varphi_1 \in G'$ folgt. Also ist $(\varphi)_{\bar{k}} = \psi^{\mathbb{N}}$, und mit G' ist auch die Mikroklasse $(\varphi)_{\bar{k}} = \psi^{\mathbb{N}} = \psi^{\hat{\mathbb{Z}}} \cap \mathrm{frob}((M_\pi^f)^{1*}|K) = G' \cap \mathrm{frob}((M_\pi^f)^{1*}|K)$ abgeschlossen.
Aus Hilfssatz 1.15 folgt die Behauptung für die K-Mikroprimstellen, also ist

$\mathrm{spec}_{M_\pi^f}((M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f) \to \mathrm{spec}((M_\pi^f)^{1*}|K)$ eine Abbildung für Mikroklassen. $\square$

3.70 Folgerung: Für die Mengen von Mikroklassen bezogen auf die Galoisgruppen $G(K^{2*}|K)$, $G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$ und $G(K^{1*}|K)$ hat man die Abbildungen

$$\mathrm{specc}(K^{2*}|K) \to \mathrm{specc}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K) \to \mathrm{specc}(K^{1*}|K),$$

$$(\mathcal{F})_K \mapsto (\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*})_K \mapsto (\mathcal{F} \cap K^{1*})_K.$$

Mit $\mathrm{specc}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}$ ist die Menge derjenigen Mikroklassen aus $\mathrm{specc}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$ bezeichnet, die auf $\mathfrak{p}_1 \leftrightarrow [\pi]$ abgebildet werden. Nach Folgerung 3.69 sind die Mikroprimstellen im Bild von $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}$ unter der Abbildung $\mathrm{spec}(K^{2*}|K) \to \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$, $(\mathcal{F})_K \mapsto \overline{(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*})_K}$ ergeben, Mikroklassen, damit ist $\mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[f]$ ein wohldefinierter Quotient von $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[f]$, also ein Subquotient von $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}$: $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]} \supseteq \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[f] \twoheadrightarrow \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[f]$. Dieser Subquotient kann in mehreren Schritten durch explizite Objekte beschrieben werden.

3.71 Definition: Für $f \geq 1$ sei der **Mehlig-Zink-Subquotient**

$$\mathbb{S}_f := \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[f] = \mathrm{spec}((M_\pi^f)^{1*}|K)_{[\pi]}[f].$$

3.72 Hilfssatz (Schritt 1 – [MZ05] Lemma 6.2): Aus der Bijektion (3.1) erhält man damit die Bijektion

$$G(M_\pi^f|M) \setminus \mathrm{spec}_{M_\pi^f}((M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f)[1] \to \mathrm{spec}((M_\pi^f)^{1*}|K)_{[\pi]}[f],$$

wobei rechts nur abgeschlossene Mikroklassen $(\mathcal{F})_K$ auftreten, für die $(\mathcal{F} \cap K^{1*})_K \leftrightarrow [\pi]$ unter $\mathrm{spec}(K^{1*}|K) \leftrightarrow G(K^{\mathrm{nr}}|K) \setminus \mathscr{P}(K^{\mathrm{nr}})$ gilt.

3.73 Bemerkung: Es soll nun die Menge $G(M_\pi^f|M) \setminus \mathrm{spec}_{M_\pi^f}((M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f)[1]$ von Mikroprimstellen vom Grad 1 beschrieben werden. Die beiden Erweiterungskörper $M_\pi^f|\mathcal{F}_\pi(f)|K$ sind APF über K. M_π^f ist die unverzweigte Erweiterung vom Grad f über $\mathcal{F}_\pi(f)$. Die zugehörigen Normenkörper $\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))$ und $\mathbb{X}_K(M_\pi^f)$ sind p-adische Körper und es gilt: $(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f)))^f = \mathbb{X}_K(M_\pi^f)$. Kurz sei $\mathbb{X}_\pi(f) := \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))$, somit $\mathbb{X}_\pi(f)^f = \mathbb{X}_K(M_\pi^f)$, mit letzterem Körper wird gearbeitet.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{X}_\pi(f) \arrow[r, dash] & \mathbb{X}_\pi(f)^f & \\
 & \mathcal{F}_\pi(f) \arrow[u, rightsquigarrow] \arrow[r, dash] & M_\pi^f \arrow[u, rightsquigarrow] \arrow[r, dotted, dash] & {} \\
K \arrow[r, dash] & M \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] & M^f \arrow[u, dash] \arrow[r, dotted, dash] & {}
\end{tikzcd}$$

Sei $L|K$ APF, insbesondere $f_{L|K} < \infty$, dann ist nach 1.35 mit d_K auch d_L lokal unverzweigt. Es gilt $G_L := G(\overline{L}|L) \cong G(\overline{\mathbb{X}_K(L)}|\mathbb{X}_K(L)) =: G_{\mathbb{X}_K(L)}$. Da $\mathbb{X}_K(L)$ ein lokaler Körper ist, ist $d_{\mathbb{X}_K(L)}$ lokal unverzweigt, und man hat Frobeniuselemente $\mathrm{frob}(\mathbb{X}_K(L))$ und

Mikroprimstellen $\operatorname{spec}(\mathbb{X}_K(L))$ für $G_{\mathbb{X}_K(L)}$.

3.74 Hilfssatz ([MZ05] Proposition 6.1): Sei L eine APF-Erweiterung von K, dann gilt:

$$\operatorname{spec}_0(L) \leftrightarrow \operatorname{spec}_L(L) \leftrightarrow \operatorname{spec}(\mathbb{X}_K(L)).$$

Beweis: Der Normenkörper $\mathbb{X}_K(L)$ einer APF-Erweiterung $L|K$ ist ein lokaler Körper der Charakteristik p, identifiziert sich also nach Wahl eines Primelements mit dem Laurentreihenkörper über dem Restkörper λ von L, $\lambda|\mathbb{F}_p$, p ist die Restkörpercharakteristik des Ausgangskörpers k.

Einer diskreten Mikroprimstelle $\mathfrak{p}$ innerhalb $\operatorname{frob}(k)$ wird zunächst die Mikroprimstelle $\mathfrak{p}_L := \mathfrak{p} \cap G_L$ innerhalb $\operatorname{frob}(L)$ zugeordnet. Diese Abbildung ist eine Bijektion, weil d_K lokal unverzweigt ist und die APF-Erweiterung $L|K$ insbesondere endlichen Trägheitsgrad hat, somit d_L auch lokal unverzweigt ist.

Der Isomorphismus $G(L^{\mathrm{sep}}|L) \cong G(\mathbb{X}_K(L)^{\mathrm{sep}}|\mathbb{X}_K(L))$, $\sigma \mapsto \mathbb{X}_K(\sigma)$ führt mit $d_{\mathbb{X}_K(L)}(\mathbb{X}_K(\sigma)) := d_L(\sigma)$ die Menge $\operatorname{frob}(L)$ in $\operatorname{frob}(\mathbb{X}_K(L))$ über, und mit $\mathbb{X}_K(\phi) \sim_{\mathbb{X}_K(L)\mathbb{X}_K(\psi)} := \phi \sim_L \psi$ für $\phi, \psi \in G(L^{\mathrm{sep}}|L)$ entsprechen sich die $\sim_L$-Äquivalenzklassen auf $\operatorname{frob}(L)$ und die $\sim_{\mathbb{X}_K(L)}$-Äquivalenzklassen $\operatorname{frob}(\mathbb{X}_K(L)$. Wegen der lokalen Unverzweigtheit von $d_{\mathbb{X}_K(L)}$ und d_L sind das bereits die Mikroprimstellen.

In Termen der Frobeniuskörper verfährt die Abbildung also folgendermaßen: Sie wählt aus der diskreten L-Mikroprimstelle die L umfassenden Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ aus, bildet die Körper $\mathbb{X}_{L|K}(\mathcal{F})$ und ergibt so die $\sim_{\mathbb{X}_K(L)}$-Äquivalenzklasse von Frobeniuskörpern auf dem Niveau der Normenkörper. □

3.75 Folgerung: Nach Hilfssatz 3.74 und Folgerung 3.29 hat man für jede APF-Erweiterung $L|K$ die Bijektionen

$$\operatorname{spec}_L(L^{1*}|L) \leftrightarrow \operatorname{spec}(\mathbb{X}_K(L)^{1*}|\mathbb{X}_K(L)) \leftrightarrow G(L^{\mathrm{nr}}|L) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K^*(L^{\mathrm{nr}})).$$

3.76 Folgerung (Schritt 2): Für $L = M_\pi^f$ ergibt sich die Bijektion

$$G(M_\pi^f|M) \setminus \operatorname{spec}_{M_\pi^f}((M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f)[1] \leftrightarrow G(M_\pi^f|M) \setminus \operatorname{spec}((\mathbb{X}_K(M_\pi^f))^{1*}|\mathbb{X}_K(M_\pi^f))[1].$$

3.77 Hilfssatz (Schritt 3): Man hat die natürliche Bijektion

$$G(M_\pi^f|M) \setminus \operatorname{spec}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f)^{1*}|\mathbb{X}_K(M_\pi^f))[1] \leftrightarrow G(M_\pi^f|M) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f)). \tag{3.2}$$

Beweis: Nach Folgerung 3.29 hat man

$$\operatorname{spec}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f)^{1*}|\mathbb{X}_K(M_\pi^f)) \leftrightarrow G(\mathbb{X}_K(M_\pi^f)^{\mathrm{nr}}|\mathbb{X}_K(M_\pi^f)) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f)^{\mathrm{nr}}).$$

Die Menge $\operatorname{spec}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f)^{1*}|\mathbb{X}_K(M_\pi^f))[1]$ entspricht dabei den Primelementen im Normenkörper $\mathbb{X}_K(M_\pi^f)$ selbst, auf diesen operiert $G(\mathbb{X}_K(M_\pi^f)^{\mathrm{nr}}|\mathbb{X}_K(M_\pi^f))$ trivial, also $\operatorname{spec}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f)^{1*}|\mathbb{X}_K(M_\pi^f))[1] \leftrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f))$. Damit gilt die Behauptung. □

3.78 Hilfssatz ([MZ05] Proposition 6.2): Sei $K_{\mathfrak{p}} \subset \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ eine Henselisierung einer Mikroprimstelle $\mathfrak{p} \in \mathbb{S}_f$ mit $\mathcal{F}_\pi(f) \subset K_{\mathfrak{p}}$. Sei $\hat{\pi} \in \mathbb{X}_K(M_\pi^f)$ mit der universellen Norm π_E der

Erweiterung $K_\mathfrak{p}|E$ für alle $E \in \mathcal{E}(K_\mathfrak{p} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}}|K_\mathfrak{p} \cap K^{\mathrm{nr}})$. Dann ist die Konjugationsklasse von $\hat{\pi}$ das Bild von $\mathfrak{p}$ unter der Bijektion (3.2). Die Erweiterung $K_\mathfrak{p} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}}|K(\pi)$ wird durch $\hat{\pi}$ erzeugt. Der Trägheitsgrad l dieser Erweiterung teilt f, und es gilt $\deg(\mathfrak{p}) = f_\pi \cdot l$, das heißt, $K_\mathfrak{p} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}} = \mathcal{F}_\pi(f)^l$. Umgekehrt sei zu einem Primelement $\hat{\pi} \in \mathbb{X}_K(M_\pi^f)$ der Körper $L := K(\hat{\pi})$ durch die Komponenten von $\hat{\pi} = (\pi_E)_{E \in \mathcal{E}(M_\pi^f|K)}$ erzeugt. Dann ist $M_\pi^f|L$ unverzweigt, und $\hat{\pi}$ bestimmt eine maximal abelsche reinverzweigte Erweiterung $\mathcal{L}|L$ mit universeller Norm $\hat{\pi}$. Alle über $\mathcal{L}$ reinverzweigten Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ innerhalb $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ gehören bereits zu einer einzigen Mikroprimstelle $\mathfrak{p} \in \mathbb{S}_f$ vom Grad $\deg(\mathfrak{p}) = f_{L|K} = f_\pi[K(\pi) : K]$.

Im vierten Schritt wird die Menge $G(M_\pi^f|M) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f))$ durch Konjugationsklassen normischer Lubin-Tate-Potenzreihen beschrieben.

3.79 Hilfssatz ([MZ05] Proposition 6.3): Sei L ein p-adischer Körper mit $\#\kappa_L =: q_L < \infty$, $\pi \in L$ Primelement und L_π die maximal abelsch reinverzweigte Erweiterung von L mit universeller Norm π. Dann ist

$$G(L_\pi|L) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_L(L_\pi)) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(L, \pi, q_L).$$

Kernpunkt ist die Feststellung, dass zu es einer normischen Folge von Primelementen genau eine normische Lubin-Tate-Potenzreihe so gibt, dass die Folge ein Erzeuger deren Tatemoduls ist ([KS96] Lemma 0.3, verwendet die Abbildung $\mathcal{C}_{l,w}$ aus Hilfssatz 5.50). Damit hat man eine wohldefinierte Abbildung $\mathscr{P}(\mathbb{X}_L(L_\pi)) \twoheadrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(L, \pi, q_L)$. Ferner ist jeder Erzeuger des Tatemoduls einer normischen Lubin-Tate-Potenzreihe nach Definition eine normische Folge von Primelementen, also ist diese Abbildung surjektiv. Die verschiedenen Erzeuger des Tatemoduls ein und derselben Lubin-Tate-Potenzreihe ergeben sich durch Operation der Galoisgruppe $G(L_\pi|L)$, und die Abbildung faktorisiert zu der behaupteten.

3.80 Hilfssatz ([MZ05] Proposition 6.4): Sei $\pi \in L$ ein Primelement. Dann ergibt sich eine natürliche Bijektion

$$G(L_\pi^f|L) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(L_\pi^f)) \leftrightarrow G(L^f|L) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(L^f, \pi, q_L^f).$$

Im Fall $[\hat{\pi}] \mapsto [\varphi(X)]$ ist der Trägheitsgrad des von $\hat{\pi} \in \mathbb{X}_K(L_\pi^f)$ erzeugten Körpers $L(\hat{\pi}) \subseteq L_\pi^f$ gleich der Länge $l(\varphi)$ des $G(L^f|L)$-Orbits $[\varphi(X)]$, die wiederum dem Körpergrad $[L_{(\varphi)} : L]$ entspricht, wobei $L_{(\varphi)}$ der von den Koeffizienten von $\varphi(X)$ erzeugte Körper sei.

3.81 Folgerung (Schritt 4): Für $L := M = K(\pi)$ mit π aus den Hilfssätzen bis 3.78 ergibt Hilfssatz 3.80 die Bijektion

$$G(M_\pi^f|M) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f)) \leftrightarrow G(M^f|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^f, \pi, q^{f_\pi f}).$$

3.82 Satz ([MZ05] Theorem 2): Es ergibt sich eine natürliche Bijektion

$$\mathbb{S}_f \leftrightarrow G(M^f|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^f, \pi, q^{f_\pi f})$$

zwischen den $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K$-Mikroprimstellen des Subquotienten $\mathbb{S}_f$ und Konjugationsklassen normischer Lubin-Tate-Potenzreihen mit Koeffizienten in M^f. Falls $\mathfrak{p} \mapsto [\varphi]$ gilt dabei $\deg(\mathfrak{p}) = f_\pi \cdot \#[\varphi(X)]$.

3.83 Bemerkung: Die vier Identifikationsschritte waren:
1. $\mathbb{S}_f = \operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[f] \leftrightarrow G(M_\pi^f|M) \setminus \operatorname{spec}_{M_\pi^f}((M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f)[1]$
2. $G(M_\pi^f|M) \setminus \operatorname{spec}_{M_\pi^f}((M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f)[1] \leftrightarrow G(M_\pi^f|M) \setminus \operatorname{spec}(({}_K(M_\pi^f))^{1*}|\mathbb{X}_K(M_\pi^f))[1]$
3. $G(M_\pi^f|M) \setminus \operatorname{spec}((\mathbb{X}_K(M_\pi^f))^{1*}|\mathbb{X}_K(M_\pi^f))[1] \leftrightarrow G(M_\pi^f|M) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f))$
4. $G(M_\pi^f|M) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(M_\pi^f)) \leftrightarrow G(M^f|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^f, \pi, f_\pi f)$

3.8 Normische Lubin-Tate-Potenzreihen, ein Projektor

3.84 Bemerkung ([MZ05] nach Lemma 7.2): Jede Lubin-Tate-Potenzreihe $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$ zerlegt sich eindeutig

$$l(X) = e(X)h(X),$$

wobei $e(X) = c_0 + c_1 X + \ldots + c_q X^q \in \mathcal{O}_K[X]$ Lubin-Tate-Polynom (c_q Einseinheit und $c_i \in \mathcal{P}_K$ für $i = 1, \ldots, q-1$), sowie $h(X) = 1 + b_1 X + \ldots \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit und $b_i \equiv a_{q+1}/a_q \bmod \pi$. Dabei ist l normisch im ersten Schritt, falls $N_{K(w_1)|K}(w_1) = \pi$ für $w_1 \in W_l^1$. Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass in der Zerlegung $f = eh$ das Polynom e die Form $\pi X + \ldots + (-1)^{q-1} X^q$ und $h \in 1 + X\mathcal{P}_K[[X]]$ ist. Die Teilmenge dieser Lubin-Tate-Potenzreihen sei $\mathfrak{F}^0(K, \pi, q)$.

3.85 Hilfssatz ([MZ05] Proposition 7.1): Man hat den Projektor

$$P : \mathfrak{F}^0(K, \pi, q) \to \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q),$$

wobei (siehe Definition 5.17)

$$P(l)(X) := \prod_{w \in W_l^1} (X +_l w) = \mathcal{L}_l(X).$$

Es gilt $W_l^1 = W_{P(l)}^1$ und $P(e) = e$ für das Polynom e aus $f = eh$.

3.86 Bemerkung ([MZ05] Example 1): Die Potenzreihen der Form

$$\frac{\pi X + \ldots + (-1)^{q-1} X^q}{1 + b_1 X + \ldots + b_{q-1} X^{q-1}}$$

sind normisch, insbesondere die Lubin-Tate-Polynome im Zähler.

4 Die Faser $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$

Dieses Kapitel geht über den Artikel [MZ05] von Mehlig und Zink hinaus. Für das weitere Vorgehen in den folgenden Kapiteln werden einige Vorarbeiten erledigt und die Beschreibung einer Faser in $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)$ in Form eines projektiven Limes begonnen. Zum Abschluss wird ein alternativer Ansatz skizziert.

Ausgangspunkt ist wieder die Faser $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$ über einer Mikroprimstelle $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{spec}(K^{1*}|K)$ innerhalb $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)$. Erster Schritt ist die Bijektion $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1} \leftrightarrow \mathrm{spec}_0(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) = \mathrm{spec}_0(\mathcal{F}_\pi^{1*}|\mathcal{F}_\pi)$. Die Erweiterung $\mathcal{F}_\pi|K$ ist nicht APF, jedoch die Erweiterungen $\mathcal{F}_\pi(f)|K$ für alle f. Daher kann die Menge $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ mit Hilfe der Theorie der Normenkörper beschrieben werden. Der Fahrplan ist:

(i) $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1} \leftrightarrow \mathrm{spec}_0(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) = \mathrm{spec}_0(\mathcal{F}_\pi^{1*}|\mathcal{F}_\pi) \leftrightarrow \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(\mathcal{F}_\pi^{1*}|\mathcal{F}_\pi)$

(ii) $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(\mathcal{F}_\pi^{1*}|\mathcal{F}_\pi) \to \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ (Vergröberung)

Es wird die natürliche Abbildung nach $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ angegeben, ferner eine entsprechende Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f')}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f')) \to \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ (Hilfssatz 4.22, Folgerung 4.23).

(iii) $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) \to \varprojlim_f \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$

Die Abbildung ist injektiv (Satz 4.28). Das Bild besteht aus den Abfolgen mit beschränktem Grad (Satz 4.26).

(iv) $\longleftrightarrow \varprojlim_f G(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))^{\mathrm{nr}}|\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))^{\mathrm{nr}})$

Dieser projektive Limes soll bezüglich der kanonischen Projektionsabbildungen $\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f')) \to \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))$ für $f|f'$ gebildet werden (Hilfssatz 4.30).

4.1 Die Äquivalenzrelation in der Faser

Dieser Abschnitt befasst sich mit einigen Varianten von [Meh03] Lemma 7.1.

4.1 Hilfssatz: Sei $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{spec}(K^{1*}|K)$, sei $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$ eine fest gewählte via $\mathrm{spec}(K^{1*}|K) \leftrightarrow G(K^{\mathrm{nr}}|K)\setminus\mathscr{P}(K^{\mathrm{nr}})$ dem $\mathfrak{p}_1$ zugeordnete universelle Norm und $\mathcal{F}_\pi \subset K^{1*}$ eine fest gewählte Henselisierung von $\mathfrak{p}_1$ mit der Invariante π, das heißt, $\mathcal{F}_\pi \supset K(\pi)$. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ zwei $\mathcal{F}_\pi$

umfassende (relative) Frobeniuskörper in K^{2*}.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{F}, \mathcal{F}' \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K^{2*} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F} \cap K^{1*}, \mathcal{F}' \cap K^{1*} \arrow[r, dash] & K^{1*} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & K(\pi) = \mathcal{F}_\pi \cap K^{\mathrm{nr}} \arrow[rr, dash] & & K^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

Dann folgt aus $\mathcal{F} \sim_K \mathcal{F}'$ bereits $\mathcal{F} \sim_{\mathcal{F}_\pi} \mathcal{F}'$.

Beweis: Die Homomorphismen $d_K : G(K^{1*}|K) \to \hat{\mathbb{Z}}$ und $G(K^{2*}|K) \to \hat{\mathbb{Z}}$ sind lokal unverzweigt. Damit gilt jeweils: Jeder Frobeniuskörper enthält einen eindeutig bestimmten minimalen Frobeniuskörper, die minimalen Frobeniuskörper einer K-Mikroprimstelle bilden eine K-Konjugationsklasse, und $\mathcal{F}_\pi$ ist ein minimaler Frobeniuskörper in K^{1*}.

Die Voraussetzung bedeutet, dass ein $\sigma \in G(K^{2*}|K)$ so existiert, dass $\sigma(\mathcal{F})\mathcal{F}'$ ein Frobeniuskörper in K^{2*} ist, also ist $\sigma(\mathcal{F})\mathcal{F}' \cap K^{1*}$ einer in K^{1*}. In $\mathcal{F} \cap K^{1*}$ und $\mathcal{F}' \cap K^{1*}$ ist $\mathcal{F}_\pi$ der eindeutig bestimmte minimale Frobeniuskörper, also $\sigma(\mathcal{F}_\pi)$ der in $\sigma(\mathcal{F}) \cap K^{1*}$. Der Frobeniuskörper $\sigma(\mathcal{F})\mathcal{F}' \cap K^{1*}$ umfasst das Kompositum $(\sigma(\mathcal{F}) \cap K^{1*})(\mathcal{F}' \cap K^{1*})$, damit enthält er die beiden minimalen Frobeniuskörper $\sigma(\mathcal{F}_\pi)$ und $\mathcal{F}_\pi$, wegen der Eindeutigkeit muss $\sigma(\mathcal{F}_\pi) = \mathcal{F}_\pi$ gelten.

Die Erweiterung $\mathcal{F}_\pi|\mathrm{Fix}(\sigma)$ ist für jeden Automorphismus σ von $\mathcal{F}_\pi$ unverzweigt. Da dann $\mathrm{Fix}(\sigma)$ ein Frobeniuskörper ist, fällt er wegen der Minimalität von $\mathcal{F}_\pi$ mit diesem zusammen, und $\sigma \in G(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi)$. □

4.2 Folgerung: Es ergibt sich eine Bijektion zwischen der Menge $\mathrm{spec}_0(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi)$ und der Faser $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$.

Beweis: Ausgangspunkt ist die kanonische surjektive Abbildung $\mathrm{spec}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) \to \mathrm{spec}(K^{2*}|K)$. Nun schränkt man diese auf $\mathrm{spec}_0(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi)$ ein, betrachtet also nur noch Mikroprimstellen, die einen $\mathcal{F}_\pi$ umfassenden Frobeniuskörper enthalten. Dessen Schnitt mit K^{1*} ist ein $\mathcal{F}_\pi$ umfassender Frobeniuskörper in K^{1*}. Andererseits ist die Faser $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$ die Menge der Mikroprimstellen $\mathfrak{P} = (\mathcal{F})_K \in \mathrm{spec}(K^{2*}|K)$ mit $\overline{\mathfrak{P}} := (\mathcal{F} \cap K^{1*}) \overset{(!)}{=} \mathfrak{p}_1 = (\mathcal{F}_\pi)$, das heißt, es gibt ein $\sigma \in G(K^{1*}|K)$ so, dass $\sigma(\mathcal{F}_\pi)(\mathcal{F} \cap K^{1*})$ ein Frobeniuskörper in K^{1*} ist. Mit $\mathcal{F}$ gehört auch $\sigma(\mathcal{F})$ zu $\mathfrak{p}_1$, also ist auch $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{F} \cap K^{1*})$ ein Frobeniuskörper, und in diesem ist $\mathcal{F}_\pi$ der eindeutig bestimmte minimale Frobeniuskörper, somit auch der in $\mathcal{F} \cap K^{1*}$. Also ist das Bild der eingeschränkten Abbildung genau die betrachtete Faser. Zwei $\mathcal{F}_\pi$ umfassende Frobeniuskörper, deren Schnitte mit K^{1*} zwei K-äquivalente Frobeniuskörper sind, sind nach Hilfssatz 4.1 bereits $\mathcal{F}_\pi$-äquivalent, also ist die Abbildung injektiv. □

Allgemein hat man folgendes Bild, wobei zu beachten ist, dass die Körper $\mathcal{F}_\pi^m := K^{m*} \cap \mathcal{F}_\pi^n$

im allgemeinen keine minimalen Frobeniuskörper mehr sind:

$$\begin{tikzcd}
 & & K^{(n+1)*} = (\mathcal{F}_\pi^n)^{1*} = (\mathcal{F}_\pi^1)^{n*} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi^n \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K^{n*} = (\mathcal{F}_\pi^n)^{0*} = (\mathcal{F}_\pi^m)^{(n-m)*} = (\mathcal{F}_\pi^1)^{(n-1)*} \arrow[d, dash] \\
 & K^{m*} \cap \mathcal{F}_\pi^n = \mathcal{F}_\pi^m \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K^{m*} = (\mathcal{F}_\pi^1)^{(m-1)*} \arrow[d, dash] \\
 & K^{1*} \cap \mathcal{F}_\pi^n = \mathcal{F}_\pi^1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K^{1*} = (\mathcal{F}_\pi^1)^{0*} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & K(\pi) \arrow[r, dash] & K^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

Der Hilfssatz 4.1 verallgemeinert sich zu:

<u>4.3 Hilfssatz:</u> Sei $\mathfrak{p}_n \in \mathrm{spec}(K^{n*}|K)$. Sei $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$ eine fest gewählte via $\mathrm{spec}(K^{n*}|K) \to \mathrm{spec}(K^{1*}|K) \leftrightarrow G(K^{\mathrm{nr}}|K)\backslash\mathscr{P}(K^{\mathrm{nr}})$ dem $\mathfrak{p}_n$ zugeordnete universelle Norm. Sei $\mathcal{F}_\pi := \mathcal{F}_\pi^n \subset K^{n*}$ eine fest gewählte Henselisierung von $\mathfrak{p}_n$ mit der Invariante π, das heißt, $\mathcal{F}_\pi \supset K(\pi)$. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ zwei $\mathcal{F}_\pi$ umfassende (relative) Frobeniuskörper in $K^{(n+1)*}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{F} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K^{(n+1)*} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F} \cap K^{n*} \arrow[r, dash] & K^{n*} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & K(\pi) = \mathcal{F}_\pi \cap K^{\mathrm{nr}} \arrow[rr, dash] & & K^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

Dann folgt aus $\mathcal{F} \sim_K \mathcal{F}'$ bereits $\mathcal{F} \sim_{\mathcal{F}_\pi} \mathcal{F}'$.

Beweis: Da die Homomorphismen $d_K : G(K^{n*}|K) \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt sind für alle n, wiederholt sich der Beweis aus dem Fall $n = 1$. Die Mikroprimstellenrelation $\sim_K$ ergibt ein $\sigma \in G(K^{(n+1)*}|K)$, welches sich als Element von $G(K^{(n+1)*}|\mathcal{F}_\pi)$ herausstellt. $\square$

<u>4.4 Folgerung:</u> Es ergibt sich eine Bijektion zwischen der Menge $\mathrm{spec}_0(K^{(n+1)*}|\mathcal{F}_\pi)$ und der Faser $\mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K)_{\mathfrak{p}_n}$.

Beweis: Man geht von der Einschränkung der kanonischen surjektiven Abbildung $\mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|\mathcal{F}_\pi) \to \mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K)$ auf $\mathrm{spec}_0(K^{(n+1)*}|\mathcal{F}_\pi)$ aus. Der Schnitt der zu betrachtenden Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ in $K^{(n+1)*}$ mit K^{n*} ist ein $\mathcal{F}_\pi$ umfassender Frobeniuskörper in K^{n*}. Eine Mikroprimstelle der Faser $\mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K)_{\mathfrak{p}_n}$ enthält einen Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ so, dass $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{F} \cap K^{n*})$ ein Frobeniuskörper in K^{n*} ist, und in diesem ist $\mathcal{F}_\pi$ der eindeutig bestimmte minimale Frobeniuskörper, somit auch der in $\mathcal{F} \cap K^{n*}$. Also ist das Bild der eingeschränkten Abbildung genau die betrachtete Faser. Zwei $\mathcal{F}_\pi$ umfassende Frobeniuskörper, deren Schnitte mit K^{n*} zwei K-äquivalente Frobeniuskörper sind, sind nach

Hilfssatz 4.3 bereits $\mathcal{F}_\pi$-äquivalent, also ist die Abbildung injektiv. $\square$

Eine andere Möglichkeit den Hilfssatz 4.1 und seine Folgerung zu verallgemeinern, ist ([Meh03] S. 49 Lemma 7.1 (2)):

4.5 Hilfssatz: Sei $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{spec}(K^{1*}|K)$, sei $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$ eine fest gewählte via $\mathrm{spec}(K^{1*}|K) \leftrightarrow G(K^{\mathrm{nr}}|K)\backslash\mathscr{P}(K^{\mathrm{nr}})$ dem $\mathfrak{p}_1$ zugeordnete universelle Norm und $\mathcal{F}_\pi \subset K^{1*}$ eine fest gewählte Henselisierung von $\mathfrak{p}_1$ mit der Invariante π, das heißt, $\mathcal{F}_\pi \supset K(\pi)$. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ zwei $\mathcal{F}_\pi$ umfassende (relative) Frobeniuskörper in $K^{(n+1)*}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{F} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K^{(n+1)*} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F} \cap K^{1*} \arrow[r, dash] & K^{1*} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & K(\pi) = \mathcal{F}_\pi \cap K^{\mathrm{nr}} \arrow[rr, dash] & & K^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

Dann folgt aus $\mathcal{F} \sim_K \mathcal{F}'$ bereits $\mathcal{F} \sim_{\mathcal{F}_\pi} \mathcal{F}'$. (Beweis siehe [Meh03]).

4.6 Folgerung: Es ergibt sich eine Bijektion zwischen der Menge $\mathrm{spec}_0(K^{(n+1)*}|\mathcal{F}_\pi)$ und der Faser $\mathrm{spec}(K^{(n+1)*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$. (Beweis siehe [Meh03]).

Schließlich ergibt sich ([Meh03] S. 49, Lemma 7.1 (3)) die Bijektion $\mathrm{spec}_0(\mathcal{F}_\pi) \leftrightarrow \mathrm{spec}(K)_{\mathfrak{p}_1}$ durch Übergang zum projektiven Limes.

4.7 Hilfssatz (vgl. [Meh03] Bijektion (7.5)): In allen behandelten Fällen für eine Mikroprimstelle $\mathfrak{p}$ und einen zugehörigen minimalen Frobeniuskörper $\mathcal{F}_\pi$ ergab sich eine Bijektion $\mathrm{spec}(E|K)_\mathfrak{p} \leftrightarrow \mathrm{spec}_0(E|\mathcal{F}_\pi)$ $(E = \bar{K},\ K^{(n+1)*})$. Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ hat man dabei eine Bijektion $\mathrm{spec}(E|K)_\mathfrak{p}[= m] \leftrightarrow \mathrm{spec}_0(E|\mathcal{F}_\pi)[= m]$ zwischen den K-Mikroprimstellen $\mathfrak{P}$ in der Faser über $\mathfrak{p}$, deren Relativgrad $\frac{\deg(\mathfrak{P})}{f_\pi} = m$ ist, und den $\mathcal{F}_\pi$-Mikroprimstellen vom Grad m auf der rechten Seite.
Beweis: Die Bijektion kam her von der Identität von Frobeniuskörpern. Für einen $\mathcal{F}_\pi$ umfassenden minimalen Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ gilt nun $f_{\mathcal{F}|K} = f_{\mathcal{F}|M} f_\pi = f_{\mathcal{F}|\mathcal{F}_\pi} f_\pi$, also $\deg((\mathcal{F})_K) = \deg((\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi}) f_\pi$. $\square$

4.2 Verträglichkeit normischer Sequenzen für $f|f'$

Dieser Abschnitt erkundet die Ausgangslage zur Verbindung des Ergebnisses von [MZ05] Abschnitt 6, der Beschreibung der Menge $\mathbb{S}_f$ für zwei verschiedene f und f'. Sei dazu ab jetzt der Fall $f|f'$ betrachtet. Dann hat man für $M := K(\pi)$ die Körper M_π^f und $M_\pi^{f'}$, die jeweilige maximal abelsche reinverzweigte Erweiterung von M^f bzw. $M^{f'}$ mit der universellen Norm π. Das Ergebnis wird sein, dass die Wahl der universellen Norm π bewirkt, dass die betrachteten Körper ineinander liegen.

4.8 Hilfssatz: Das Kompositum $M_\pi^f M^{f'}$ ist ein Teilkörper von $M_\pi^{f'}$.

Beweis: Als Kompositum zweier abelscher Erweiterungen ist $M_\pi^f M^{f'}|M^f$ abelsch, also auch die Erweiterung $M_\pi^f M^{f'}|M^{f'}$, ferner ist $f_{M_\pi^f M^{f'}|M^{f'}} = \frac{f_{M_\pi^f M^{f'}|M^f}}{f_{M^{f'}|M^f}} = 1$. Für jede endliche Teilerweiterung $M_\pi^f M^{f'}|E|M^{f'}$ ist die Erweiterung $E|E \cap M_\pi^f$ unverzweigt. Da π universelle Norm der Erweiterung $M_\pi^f|M^f$ ist, gibt es ein Element $e \in E \cap M_\pi^f \subseteq E$ mit $N_{E\cap M_\pi^f|M^f}(e) = \pi$. Wegen der linearen Disjunktheit der Erweiterungen $M^{f'}|M^f$ und $E \cap M_\pi^f|M^f$ ist auch $N_{E|M^{f'}}(e) = \pi$. Also ist π Norm der abelschen Erweiterung $M_\pi^f M^{f'}|M^{f'}$. Damit muss $M_\pi^f M^{f'}$ in der maximal abelschen Erweiterung von $M^{f'}$ mit universeller Norm π liegen, nämlich $M_\pi^{f'}$. $\square$

4.9 Folgerung: Es gilt $M_\pi^f \subseteq M_\pi^{f'}$, und man hat das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}_\pi \arrow[rrr, dash] \arrow[d, dash] & & & K^{1*} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi(f') \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & M_\pi^{f'} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F}_\pi(f')^{\mathrm{nr}} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi(f) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M_\pi^f \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M_\pi^f M^{f'} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & M = K(\pi) \arrow[r, dash] & M^f \arrow[r, dash] & M^{f'} \arrow[r, dash] & K^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

4.10 Definition: Die Situation wird verfeinert: Sei $q := \#\kappa_K$ und $f_\pi := f_{\mathcal{F}_\pi|K} = \deg(\mathfrak{p}_1) < \infty$. Die Körper M_π^f bzw. $M_\pi^{f'}$ werden zunächst erzeugt mit Hilfe einer Lubin-Tate-Potenzreihe aus $\mathfrak{F}(M^f, \pi, q^{f_\pi f})$ bzw. $\mathfrak{F}(M^{f'}, \pi, q^{f_\pi f'})$. Über M^f bzw. $M^{f'}$ ergibt sich jeweils der Turm $(M_\pi^f(n))_n$ bzw. $(M_\pi^{f'}(n))_n$ der n-ten Teilungskörper, $n \geq 1$. Da die Sequenzen von Primelementen $(\pi_f(n) \in M_\pi^f(n))_n$ bzw. $(\pi_{f'}(n) \in M_\pi^{f'}(n))_n$ zusätzlich normisch sein sollen, kommen nur normische Potenzreihen, also solche aus $\mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^f, \pi, q^{f_\pi f})$ bzw. $\mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^{f'}, \pi, q^{f_\pi f'})$ in Betracht.

4.11 Hilfssatz: Es gilt $M_\pi^f(n) M^{f'} \subseteq M_\pi^{f'}(n)$.

Beweis: Die Galoisgruppen $G(M_\pi^f(n)|M^f)$ und $G(M_\pi^f(n)M^{f'}|M^{f'})$ sind isomorph. Nach Klassenkörpertheorie gelten $G(M_\pi^f(n)|M^f) \cong M^f/N_{M_\pi^f(n)|M^f}$ und $G(M_\pi^f(n)M^{f'}|M^{f'}) \cong M^{f'}/N_{M_\pi^f(n)M^{f'}|M^{f'}}$, wobei $N_{M_\pi^f(n)|M^f} = \langle\pi\rangle U^n(M^f)$ ist, wobei U^n die Einseinheiten n-ter Stufe seien. Der Isomorphismus der beiden Galoisgruppen entspricht der Norm $N_{M^{f'}|M^f} : M^{f'}/N_{M_\pi^f(n)M^{f'}|M^{f'}} \to M^f/N_{M_\pi^f(n)|M^f}$. Da dies ein Isomorphismus ist, muss $\ker N_{M^{f'}|M^f} \subseteq N_{M_\pi^f(n)M^{f'}|M^{f'}}$ sein.

Es gilt $N_{M_\pi^f(n)|M^f} = \langle\pi\rangle U^n(M^f)$ und $N_{M_\pi^{f'}(n)|M^{f'}} = \langle\pi\rangle U^n(M^{f'})$. Die Normengruppe $N_{M_\pi^f(n)M^{f'}|M^{f'}}$ muss $\langle\pi\rangle N_{M^{f'}|M^f}^{-1}(U^n(M^f))$ enthalten. Wegen der Unverzweigtheit von $M^{f'}|M^f$ ist die Norm $N_{M^{f'}|M^f}$ von $U^n(M^{f'})$ nach $U^n(M^f)$ surjektiv. Schließlich gilt $U^n(M^{f'}) \subseteq N_{M^{f'}|M^f}^{-1} U^n(M^f)$, das heißt, $N_{M_\pi^{f'}(n)|M^{f'}} \subseteq N_{M_\pi^f(n)M^{f'}|M^{f'}}$, woraus nach Klassenkörpertheorie die Behauptung folgt. $\square$

4.12 Folgerung: Es gilt $M_\pi^f(n) \subseteq M_\pi^{f'}(n)$ und man hat das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & & M_\pi^{f'} \arrow[d, dash] & \\
 & M_\pi^f \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & M_\pi^f M^{f'} \arrow[d, dash] & \\
 & & M_\pi^{f'}(n) \arrow[d, dash] & \leftarrow \pi_{f'}(n) \\
\pi_f(n) \rightarrow & M_\pi^f(n) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M_\pi^f(n) M^{f'} \arrow[d, dash] & \leftarrow \pi_f(n) \\
\pi \rightarrow & M^f \arrow[r, dash] & M^{f'} & \leftarrow \pi
\end{tikzcd}
$$

4.13 Definition: Zwei normische Sequenzen $(\pi^f(n))_n$, wobei $\pi^f(n) \in M_\pi^f(n)$, und $(\pi^{f'}(n))_n$, wobei $\pi^{f'}(n) \in M_\pi^{f'}(n)$, von Primelementen heißen **verträglich**, falls für alle $n \geq 1$ gilt:

$$N_{M_\pi^{f'}(n)|M_\pi^f(n)M^{f'}}(\pi_{f'}(n)) = \pi_f(n).$$

4.14 Definition: Zwei Lubin-Tate-Potenzreihen $l \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^f, \pi, q^{f_\pi f})$ und $l' \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^{f'}, \pi, q^{f_\pi f'})$ heißen **verträglich**, falls ihre Tatemoduln T_l und $T_{l'}$ solche Erzeuger w und w' (Definition 3.58) besitzen, dass die normischen Sequenzen $w = (w_n)_n$ und $w' = (w'_n)$ verträglich sind. Diese Verträglichkeit von Lubin-Tate-Potenzreihen mit unterschiedlichen Exponenten wird in Kapitel 6 noch eine große Rolle spielen.

4.3 Diskrete Mikroprimstellen und Grundkörpererhöhung

In diesem Abschnitt wird der Frage nachgegangen, welche Mikroprimstellen man von erhöhtem Grundkörper aus erreichen kann. Das Problem wird ohne lokale Unverzweigtheit sehr unübersichtlich, bei der Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)) \to \mathrm{spec}_0(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*})|\mathcal{F}_\pi(f))$ ist man jedoch in einem günstigen Fall.
Nach Hilfssatz 1.11 ergibt $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}_K := \mathfrak{p} \cap G_K$ für $K|k$ endlich eine Bijektion $\mathrm{spec}(K) \leftrightarrow \mathrm{spec}_K(K)$, und es stellt sich die Frage, ob es in anderen Fällen verwandte Abbildungen gibt. Sei $M|k$ normal und k^{nr} enthaltend, also $d : G(M|k) \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ surjektiv, ferner L eine Teilerweiterung von M.
Es wird nun einerseits zu $\varphi \in \mathrm{frob}(M|k)$ die L-Mikroklasse $(\varphi)_L^k$ innerhalb $\mathrm{frob}(M|k)$ betrachtet. Der untere Index bezeichne den Körper der Äquivalenzrelation, der obere den Grundkörper bei der Mikroklassenbildung. Die Teilmenge $\mathrm{specc}_{k,0}(M|L) \subseteq \mathrm{specc}_k(M|L)$ der diskreten Mikroklassen (Definition 1.12) besteht aus den Mikroklassen mit $(\varphi)_L^k \cap G(M|L) \neq \emptyset$, also ohne Einschränkung $\varphi \in \mathrm{frob}(M|L)$. Andererseits wird zu $\varphi \in \mathrm{frob}(M|L)$ die L-Mikroklasse $(\varphi)_L^L$ innerhalb $\mathrm{frob}(M|L)$ betrachtet.

4.15 Hilfssatz: Man hat folgende **Bijektion für L-Mikroklassen:**

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{specc}_{k,0}(M|L) & \longleftrightarrow & \mathrm{specc}_L(M|L) \\ (\varphi)_L^k & \mapsto & (\varphi)_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L). \end{array}$$

Beweis: Für $\varphi' \in \mathrm{frob}(M|L)$ mit $(\varphi')_L^k = (\varphi)_L^k$ ist $(\varphi')_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L) = (\varphi)_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L)$. Alle Elemente aus $(\varphi')_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L)$ sind insbesondere L-äquivalent, und jedes zu einem Element aus $(\varphi')_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L)$ L-äquivalente Element $\psi \in \mathrm{frob}(M|L)$ ist L-äquivalent zu φ'. Also ist die Menge $(\varphi)_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L) = (\varphi')_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L) = (\varphi')_L^L$ eine von der Wahl von φ' unabhängige L-Mikroklasse in $\mathrm{frob}(M|L)$, und die Abbildung ist wohldefiniert. Sie ist injektiv, weil aus $(\varphi)_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L) = (\psi)_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L)$ mit $\varphi, \psi \in \mathrm{frob}(M|k)$, bereits $(\varphi')_L^L = (\varphi')_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L) = (\psi')_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L) = (\psi)_L^L$ mit $\varphi' \sim_L \psi' \in \mathrm{frob}(M|L)$, somit $\varphi \sim_L \varphi' \sim_L \psi' \sim_L \psi$ in $\mathrm{frob}(M|k)$, also $(\varphi)_L^k = (\psi)_L^k$ folgt. Sie ist surjektiv, weil jeder Erzeuger φ einer L-Mikroklasse $(\varphi)_L^L$ in $\mathrm{frob}(M|L)$ auch eine Mikroklasse $(\varphi)_L^k$ in $\mathrm{frob}(M|k)$ erzeugt und für diese $(\varphi)_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L) = (\varphi)_L^L$ gilt. ☐

4.16 Folgerung: Ist $d : G(M|k) \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt, dann sind alle Mikroklassen abgeschlossen, und die Bijektion für Mikroklassen wird zur Bijektion für Mikroprimstellen $\mathrm{spec}_{k,0}(M|L) \leftrightarrow \mathrm{spec}_L(M|L)$.

4.17 Bemerkung: Allgemein ergibt sich die Menge $\mathrm{spec}_k(M|L)$ der L-Mikroprimstellen in $\mathrm{frob}(M|k)$ durch Abschließen der L-Mikroklassen in $\mathrm{frob}(M|k)$. Sei $\varphi \in \mathrm{frob}(M|k)$ so, dass $\mathfrak{p} := \overline{(\varphi)_L^k}^k \in \mathrm{spec}_{k,0}(M|L) \subseteq \mathrm{spec}_k(M|L)$. Der oberste Index von $\overline{(\varphi)_L^k}^k$ steht für den Grundkörper bei der Abschlussbildung, bei Mikroprimstellen sind die oberen beiden gleich. Hilfssatz 1.11 entsprechend müsste man $\mathfrak{p}$ die nach Definition nichtleere Menge $\mathfrak{p}_L := \mathfrak{p} \cap G(M|L) = \mathfrak{p} \cap \mathrm{frob}(M|L) = \overline{(\varphi)_L^k}^k \cap \mathrm{frob}(M|L)$ zuordnen. Diese Menge umfasst die Mikroprimstelle $\overline{(\varphi)_L^k \cap \mathrm{frob}(M|L)}^L = \overline{(\varphi)_L^L}^L$, jedoch ist die Gleichheit, und damit die Wohldefiniertheit dieser Zuordnung nur im Fall $L|k$ endlich, also $\mathrm{frob}(L)$ in $\mathrm{frob}(k)$ offen, ohne weiteres ersichtlich. Ordnet man stattdessen gleich $\overline{(\varphi)_L^L}^L$ zu, bleibt offen, ob aus $\overline{(\varphi')_L^k}^k = \overline{(\varphi)_L^k}^k$ immer $\overline{(\varphi')_L^L}^L = \overline{(\varphi)_L^L}^L$ folgt. Umgekehrt müsste einem $\overline{(\varphi)_L^L}^L \in \mathrm{spec}_L(M|L)$ die Mikroprimstelle $\overline{(\varphi)_L^k}^k \in \mathrm{spec}_{k,0}(M|L)$ zugeordnet werden. Wohldefiniert wäre das, falls aus $\overline{(\varphi')_L^L}^L = \overline{(\varphi)_L^L}^L$ immer $\overline{(\varphi')_L^k}^k = \overline{(\varphi)_L^k}^k$ folgt. Im allgemeinen Fall kann es also schwierig sein, die Mengen $\mathrm{spec}_{k,0}(M|L)$ und $\mathrm{spec}_L(M|L)$ zu verbinden.

4.18 Bemerkung: Nach Satz 3.24 ist der Homomorphismus $d_K : G(K^{n*}|K) \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt für alle $n \geq 0$. Also besteht $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)$ aus Mikroklassen, insbesondere $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}$ (Definition 3.62). Da $\mathcal{F}_\pi(f)$ APF, insbesondere f-endlich ist, ist nach Hilfssatz 1.35 auch $d_{\mathcal{F}_\pi(f)} : G(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi(f)) \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt, also hat man die Bijektion $\mathrm{spec}_0(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi(f)) \leftrightarrow \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ von Mikroklassen.
Nach Übergang zu den Normenkörpern (vgl. [MZ05] Lemma 6.2) folgt die lokale Unverzweigtheit von $d_{\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))} : G(\mathbb{X}_{\mathcal{F}_\pi(f))|K}(K^{2*})|\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))) \to \hat{\mathbb{Z}}$, also auch die von $d_{\mathbb{X}(\mathcal{F}_\pi(f)} : G(\mathbb{X}_{\mathcal{F}_\pi(f)|K}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*})|\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))) = G(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))^{1*}|\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))) \to \hat{\mathbb{Z}}$, und damit $d_{\mathcal{F}_\pi(f)} : G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)) \to \hat{\mathbb{Z}}$. Also besteht $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ aus Mikroklassen. (Daraus folgt jedoch nicht, dass auch $d_K : G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*})|K) \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt ist.)

Man hat nun die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)) & \to & \mathrm{spec}_0(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*})|\mathcal{F}_\pi(f)) \\ (\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi(f)} & \mapsto & \overline{(\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi(f)}}^K . \end{array}$$

Sie ist im Allgemeinen nicht wohldefiniert. Da man hier jedoch mit Mikroklassen startet, kann man die Bijektion für Mikroklassen ausnutzen und erhält eine wohldefinierte Abbildung. Im Bild von $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ sind nur diejenigen diskreten Mikroprimstellen, bei denen auch die zugrundeliegende Mikroklasse diskret ist: die stark diskreten Mikroprimstellen (Definition 1.12). Es soll nun gezeigt werden, dass die Mikroprimstellen auf der rechten Seite Mikroklassen sind.

4.19 Hilfssatz (vgl. [MZ05] Lemma 6.3, [Meh03] Folgerung 7.1): Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}_0(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*})|\mathcal{F}_\pi(f))$ im Bild der Abbildung, das heißt stark diskret. Die Zerlegungsgruppe $G_\mathfrak{p}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$ hat trivialen Schnitt mit I_K, das heißt, $d_K : G_\mathfrak{p}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K) \to \hat{\mathbb{Z}}$ ist injektiv, der Homomorphismus d_K ist in $\mathfrak{p}$ unverzweigt.
Eine abgeschlossene abelsche Untergruppe $A \subset G := G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$ enthalte ein Frobeniuselement $\varphi \in H := G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$. (Bei der lokalen Unverzweigtheit soll A offenes Bild $d(A) \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ haben, das heißt, $d(A) = a\hat{\mathbb{Z}}$, somit soll A ein Frobeniuselement $\varphi \in G$ enthalten.)
Die Menge $A_H := A \cap H$ ist eine abgeschlossene abelsche Untergruppe von H, und das Frobeniuselement φ ist auch in A_H. Da $d_{\mathcal{F}_\pi(f)} : H \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt ist, folgt $A_H \cap I_H = A \cap H \cap I_K = \{1\}$. Es gilt $\mathcal{F}_\pi(f) \subset \mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}} = (M_\pi^f)^{\mathrm{nr}} = (M^f)^{\mathrm{ab}} \subset (K^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ab}} = K^{1*}$ und $K^{\mathrm{nr}} \subset K^{1*}$, also $H_0 := G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K^{1*}) \subset H \cap I_K$, und daraus folgt $A \cap H_0 = \{1\}$.
Die Abbildung $d_K : G(K^{1*}|K) = G/H_0 \to \hat{\mathbb{Z}}$ ist lokal unverzweigt. Da A abgeschlossen im Kompaktum $G((M_\pi^f)^{1*}|K)$ ist, ist A kompakt. Daher ist das Bild $\overline{A} := AH_0 \in G/H_0$ kompakt in einem Hausdorffraum, also eine abelsche Untergruppe. Diese enthält das Frobeniuselement φH_0, denn $d_K(\varphi H_0) = d_K(\varphi) = f_{K(\pi)|K} d_{F_\pi(f)}(\varphi) \in \mathbb{N}$. Also ist $\overline{A} \cap \overline{I_K} = \{1\}$, das heißt, $AH_0 \cap I_K \subseteq H_0$, durch Schnitt mit A somit $A \cap I_K \subseteq A \cap H_0 = \{1\}$. □

4.20 Satz (vgl. [Neu94] Satz 2.2, [Meh03] Folgerung 7.1): Die von der Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)) \to \mathrm{spec}_0(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*})|\mathcal{F}_\pi(f))$ erreichten Mikroklassen sind in $\mathrm{frob}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$ bereits abgeschlossen. Damit ist die Abbildung auf die stark diskreten Mikroprimstellen einfach die Bijektion für Mikroklassen.
Beweis: Sei $\mathfrak{p} := \overline{(\varphi)_{\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}}}$ eine Mikroprimstelle mit einem Frobeniuselement $\varphi \in H = G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ und $G' := \{\sigma \in G \mid (\sigma\varphi\sigma^{-1})_{\overline{k}} = (\varphi)_{\overline{k}}\}$. Es gilt $\varphi \in G'$. Sei $\sigma \in G' \cap I_K$. Dann muss $\sigma\varphi^a\sigma^{-1} = \varphi^b$ sein, somit $a = b$, und für die abgeschlossene abelsche Gruppe $A := \overline{\langle\sigma, \psi\rangle}$, wobei $\psi := \varphi^a \in H$ Frobeniuselement, gilt nach Hilfssatz 4.19 $A \cap I_K = \{1\}$, also $\sigma = 1$. Somit ist $G' \cap I_K = \{1\}$, also $d_K : G' \to \hat{\mathbb{Z}}$ injektiv mit offenem Bild.
Demnach ist $G' = \psi^{\hat{\mathbb{Z}}}$ mit einem Frobeniuselement $\psi \in G$. Ferner ist $(\varphi)_{\bar{K}} \subset G'$, weil aus $\varphi_1 \sim \varphi$, das heißt, $\varphi_1^a = \varphi^b$, bereits $\varphi_1\varphi\varphi_1^{-1} \sim \varphi_1\varphi^b\varphi_1^{-1} = \varphi_1\varphi_1^a\varphi_1^{-1} = \varphi_1^a = \varphi^b \sim \varphi$, also $\varphi_1 \in G'$ folgt. Also ist $(\varphi)_{\bar{K}} = \psi^{\mathbb{N}}$, und mit G' ist auch die Mikroklasse $(\varphi)_{\bar{K}} = \psi^{\mathbb{N}} = \psi^{\hat{\mathbb{Z}}} \cap \mathrm{frob}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K) = G' \cap \mathrm{frob}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$ abgeschlossen. Nach Hilfssatz 1.15 ist auch $(\varphi)_{\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}}$ abgeschlossen. □

4.21 Bemerkung: Die der Abbildung $\mathrm{spec}_0(K) \leftrightarrow \mathrm{spec}_K(K)$ aus dem Fall $K|k$ endlich entsprechende Zuordnung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{spec}_0(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*})|\mathcal{F}_\pi(f)) & \to & \operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)) \\ \overline{(\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi(f)}}^K & \mapsto & \overline{(\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi(f)}}^K \cap \operatorname{frob}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)) \end{array}$$

ist im allgemeinen nicht wohldefiniert: Dieser Schnitt ist abgeschlossen, aber ist er Abschluss einer Mikroklasse, das heißt eine Mikroprimstelle? Wenn ja, wäre die Abbildung surjektiv. Bei der Injektivität stellt sich die Frage, ob bei der Abschlussbildung zwei Mikroklassen zusammenfallen können. In der hiesigen Situation sind die Bilder bereits Mikroklassen. Die Ausgangsmikroprimstelle $\overline{(\mathcal{F})^K_{\mathcal{F}_\pi(f)}}$ ist Abschluss einer Mikroklasse, die Elemente aus $\operatorname{frob}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ enthält. Für eine weitere Mikroprimstelle $\overline{(\mathcal{F}')^K_{\mathcal{F}_\pi(f)}}$ mit derselben Bildmikroklasse folgt, dass die enthaltenen Elemente aus $\operatorname{frob}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ bereits $\mathcal{F}_\pi(f)$-äquivalent zu denen er ersten sind. Also werden beide Mikroprimstellen von derselben Mikroklasse erzeugt und sind gleich, man hat hier die Injektivität, also Bijektivität.

4.4 Eine Approximation der Faser $\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$

Sei wieder $\mathfrak{p}_1 = (\mathcal{F}_1)_K \in \operatorname{spec}(K^{1*}|K)$ und $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$ die universelle Norm der reinverzweigten Erweiterung $\mathcal{F}_1|\mathcal{F}_1 \cap K^{\mathrm{nr}}$, insbesondere ist $\pi \in K(\pi) = \mathcal{F}_1 \cap K^{\mathrm{nr}}$ Primelement. Die Henselisierung $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}_1}$, das ist ein zu $\mathfrak{p}_1$ gehöriger minimaler Frobeniuskörper, ist eindeutig bis auf $G(K^{1*}|K)$-Konjugation. Eine Henselisierung, die mit π verträglich ist, das heißt, $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}_1} \cap K^{\mathrm{nr}} \supset K(\pi)$, ist eindeutig bis auf $G(K^{1*}|K(\pi))$-Konjugation. Sei eine solche gewählt dies betonend mit $\mathcal{F}_\pi$ bezeichnet. Wegen $\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1} \leftrightarrow \operatorname{spec}_0(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) \leftrightarrow \operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi)$ kann man die letzte Menge betrachten.

In diesem Abschnitt soll die Menge $\operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) = \operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(\mathcal{F}_\pi^{1*}|\mathcal{F}_\pi)$ mit Hilfe des projektiven Limes der Mengen $\operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ beschrieben werden. Anlassgebend dafür sind die Beobachtungen $K^{2*} = \bigcup \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$, $\mathcal{F}_\pi = \bigcup \mathcal{F}_\pi(f)$ und die Beschreibbarkeit von $\operatorname{spec}_L(L^{1*}|L)$ für APF-Erweiterungen $L|K$ durch Konjugationsklassen von Primelementen im Normenkörper $\mathbb{X}_K^{\mathrm{nr}}(L)$. Es sei nun folgende Situation betrachtet:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{F} \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & K^{2*} \arrow[d, dash] \\
 & & \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*} \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & \mathcal{F}_\pi(f)^{1*} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F} \cap K^{1*} \arrow[rr, dash] & & K^{1*} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi(f) \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & M_\pi^f \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F}_\pi(f)^{0*} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & M = K(\pi) \arrow[rr, dash] & & M^f \arrow[r, dash] & K^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

4.22 Hilfssatz: Man hat eine wohldefinierte Abbildung

$$\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) \to \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)).$$

Beweis: Man beginnt mit einer Mikroprimstelle $\overline{(\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi}}$. Da der Homomorphismus d_K auf $G(K^{2*}|K)$ lokal unverzweigt ist, gleicht sie bereits der Mikroklasse $(\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi}$. Der Körper $\mathcal{F}$ ist ein $\mathcal{F}_\pi$ umfassender Frobeniuskörper innerhalb von K^{2*}. Das Bild sei die von $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ erzeugte $\mathcal{F}_\pi(f)$-Mikroprimstelle auf der rechten Seite.

Zum Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ gehört ein eindeutig bestimmtes Frobeniuselement $\varphi_\mathcal{F} \in G(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi)$. Wegen $\mathcal{F}_\pi(f)^{0*} = (M_\pi^f)^{\mathrm{nr}} = M_\pi^f K^{\mathrm{nr}} = (M^f)^{\mathrm{ab}}$ sind mit $M^f|K$ auch $(M^f)^{\mathrm{ab}} = \mathcal{F}_\pi(f)^{0*}|K$ und $((M^f)^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{ab}} = \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K$ normale Erweiterungen.

$$\begin{tikzcd}
G(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) \arrow[rr, "\mathrm{res}"] \arrow[dr, "d_{\mathcal{F}_\pi}"'] & & G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)) \arrow[dl, "d_{\mathcal{F}_\pi(f)}"] \\
& \hat{\mathbb{Z}} &
\end{tikzcd}$$

Die Einschränkung von $\varphi_\mathcal{F}$ auf $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ ist ein Frobeniuselement in $G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$: Da $\mathcal{F}_\pi|\mathcal{F}_\pi(f)$ reinverzweigt ist, ist $d_{\mathcal{F}_\pi} = d_{\mathcal{F}_\pi(f)}$. Also ist $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ als Fixkörper von $\varphi_\mathcal{F}|_{\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}}$ ein Frobeniuskörper in $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$. Der Körper $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ umfasst weiterhin $\mathcal{F}_\pi$, denn $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*} \supset K^{1*} \supset \mathcal{F}_\pi$, und erzeugt wegen $\mathcal{F}_\pi \supset \mathcal{F}_\pi(f)$ eine $\mathcal{F}_\pi(f)$-Mikroprimstelle aus $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$.

Nach Bemerkung 4.18 ist der Homomorphismus $d_{\mathcal{F}_\pi(f)} : G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)) \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt auch im Fall der APF-Erweiterung $\mathcal{F}_\pi(f)$ statt einem lokalen Körper. Also kann man in $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ wieder $\mathcal{F}_\pi(f)$-Mikroklassen innerhalb $\mathrm{frob}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ betrachten.

Die $\mathcal{F}_\pi$-Äquivalenz zweier Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ in K^{2*} bedeutet für die zugehörigen Frobeniuselemente, dass $\sigma \in G(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi)$ und $a, b \in \mathbb{N}$ so existieren, dass $\varphi_\mathcal{F}^a = \sigma \varphi_{\mathcal{F}'}^b \sigma^{-1}$. Dann gilt auch $\overline{\varphi_\mathcal{F}}^a = \bar{\sigma}\overline{\varphi_{\mathcal{F}'}}^b \bar{\sigma}^{-1}$ für die jeweiligen Einschränkungen auf $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$. Der Fixkörper von $\bar{\sigma}$ umfasst $\mathcal{F}_\pi \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*} = \mathcal{F}_\pi$, das heißt, $\bar{\sigma} \in G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi)$, also sind die Frobeniuskörper $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ und $\mathcal{F}' \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ in $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ immer $\mathcal{F}_\pi$-äquivalent, erst recht $\mathcal{F}_\pi(f)$-äquivalent. Damit ist die Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) \to \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ wohldefiniert. □

4.23 Folgerung: Man kann mit dem folgenden kommutativen Diagramm für $f|f'$ zum projektiven Limes übergehen:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f')}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f')) \arrow[dd] \\
\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))
\end{tikzcd}$$

und erhält eine Abbildung

$$\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) \to \varprojlim_f \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)).$$

Beweis: Für $f|f'$ werden folgende Abbildungen betrachtet

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f')}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f')) & \twoheadrightarrow & \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)) \\ (\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi(f')} & \mapsto & (\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*})_{\mathcal{F}_\pi(f)} \\ (\varphi)_{\mathcal{F}_\pi(f')} & \mapsto & (\varphi|_{\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}})_{\mathcal{F}_\pi(f)} \end{array}$$

mit einem Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ innerhalb $\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}$ bzw. einem Frobeniuselement $\varphi \in \mathrm{frob}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|K)$. Die Abbildungen sind analog zu der bereits definierten wohldefiniert und bilden ein projektives System bezüglich der gerichteten Menge $\{f \in \mathbb{N}, f \leq f' :\Leftrightarrow f|f'\}$, und man kann zum projektiven Limes übergehen. $\square$

<u>**4.24 Bemerkung:**</u> Auf der rechten Seite hat man Systeme $(\mathfrak{p}_f)_f$ von Mikroprimstellen $\mathfrak{p}_f = (\mathcal{F}_f)_{\mathcal{F}_\pi(f)}$, erzeugt von Frobeniuskörpern $\mathcal{F}_f$ in $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$, die $\mathcal{F}_\pi(f)$ enthalten. Man ist in jeder Komponente im lokal unverzweigten Fall, also entspricht eine Mikroprimstelle einer Konjugationsklasse minimaler Frobeniuskörper (Henselisierungen). Im Bild der Abbildung in den projektiven Limes können nur solche Abfolgen $(\mathfrak{p}_f)_f$ sein, für die der Grad der Mikroprimstellen $\mathfrak{p}_f$, das ist der Trägheitsgrad der Henselisierungen $\mathcal{F}_f := \mathcal{F}_{\mathfrak{p}_f}$, begrenzt für alle f ist. Diese notwendige Bedingung erweist sich als hinreichend.

<u>**4.25 Hilfssatz:**</u> Sei $h \in G_k$ fest gewählt. Dann ist die G_k-Konjugationsklasse von h eine kompakte Menge in G_k.
Beweis: Für ein festes $h \in G_k$ hat man die stetige Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G_k & \to & G_k \\ g & \mapsto & ghg^{-1}. \end{array}$$

Die Konjugationsklasse von h ist das stetige Bild des Kompaktums G_k, somit ebenfalls kompakt in G_k. Ist das h sogar in $\mathrm{frob}(k)$ gewählt, dann ist seine G_k-Konjugationsklasse eine Teilmenge von $d^{-1}(d(h)) \subset \mathrm{frob}(k)$, also auch kompakt in $\mathrm{frob}(k)$ mit der induzierten Topologie. $\square$

<u>**4.26 Satz:**</u> Das Bild der in Folgerung 4.23 erhaltenen Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) \to \varprojlim_f \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ besteht genau aus denjenigen Abfolgen $(\mathfrak{p}_f)_f$, für die der Trägheitsgrad der Henselisierungen $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}_f}$ begrenzt ist.
Beweis: Sei $\{\mathfrak{p}_f\}_f$, $\mathfrak{p}_f \in \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ eine Abfolge mit beschränktem Grad. Gesucht ist ein Urbild in $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$, dazu reicht es, einen Frobeniuskörper innerhalb K^{2*} so zu finden, dass die von ihm erzeugte Mikroprimstelle als Bild im betrachteten Limes die Ausgangsabfolge hat.
Denn innerhalb der Mikroprimstelle $\mathfrak{p}_f$ hat man die G_f-Konjugationsklasse (L_f) von Henselisierungen in $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$, wobei $G_f := G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$. Im Fall $f|f'$ hat man die Abbildungen

$$P_{f|f'} : \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f')}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f')) \to \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)).$$

Der Körper $L_{f'} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ ist möglicherweise kein minimaler Frobeniuskörper in $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$, dann hat man die endliche unverzweigte Erweiterung $L_{f'} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|L_f$, wobei L_f der in $L_{f'} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ einzige minimale Frobeniuskörper sei. Da die Ausgangsabfolge beschränkten Grad hat, kann dieser Ausnahmefall nur endlich oft auftreten, und man findet eine Zahl f_0 so, dass $L_f = L_{f'} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ für alle $f \geq f_0$ und $f'|f$ gilt. Man kann sich für f also auf das kofinale System der Vielfachen von f_0 beschränken und immer $L_f = L_{f'} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ annehmen.

Dann ordnet die Abbildung der Mikroprimstelle $\mathfrak{p}_{f'}$ mit der Henselisierung $L_{f'}$ die Mikroprimstelle $\mathfrak{p}_f$ mit der Henselisierung $L_f = L_{f'} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ zu. Analog ordnet sie der Mikroprimstelle $\mathfrak{p}_{f'}$ mit dem maximalen Frobeniuselement $\varphi_{f'}$ die Mikroprimstelle $\mathfrak{p}_f$ mit dem maximalen Frobeniuselement $\varphi_f := \overline{\varphi_{f'}} := \varphi_{f'} \bmod G_{\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}} = \varphi_{f'}|_{\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}}$ zu. Diese Einschränkungsabbildung ist stetig.

Nun werden alle G_f-Konjugationsklassen (L_f) für alle f mit $f_0|f$ betrachtet. Diesen entsprechen G_f-Konjugationsklassen (φ_f) in $\mathrm{frob}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$ von maximalen Frobeniuselementen. Nach dem Hilfssatz 4.25 ist eine solche kompakt in $\mathrm{frob}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$.

Die Konjugationsklassen (φ_f) für alle $f \in \mathbb{N}$ bilden zusammen mit den stetigen Einschränkungsabbildungen ein projektives System kompakter, nichtleerer Mengen: $(\varphi_{f'}) \overset{P_{f|f'}}{\to} (\varphi_f)$, $\varphi_{f'} \mapsto \varphi_{f'}|_{\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}}$, und der projektive Limes $\varprojlim(\varphi_f)$ ist nach [Neu92] Satz 2.3 wieder kompakt und nichtleer.

Jedes Element von $\varprojlim(\varphi_f)$ entspricht durch Bildung der Fixkörper einer Abfolge von Frobeniuskörpern L_f innerhalb $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$. Die Abfolge ist durch Inklusion geordnet für $f|f'$, und der Trägheitsgrad der Frobeniuskörper L_f ist begrenzt, also ist die Vereinigung

$$L := \bigcup_f L_f$$

ein Frobeniuskörper in K^{2*} und das gesuchte Urbild, weil offensichtlich $L \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*} = L_f$ gilt. $\square$

<u>**4.27 Folgerung:**</u> Der Grad einer Mikroprimstelle der linken Seite entspricht dem sich stabilisierenden Grad auf der linken Seite.

Beweis: Ergibt $L := \bigcup_f L_f$ einen minimalen Frobeniuskörper, dann sind die Körper L_f fast alle minimal. $\square$

<u>**4.28 Satz:**</u> Die Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi) \to \varprojlim_f \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ ist injektiv.

Beweis: Es seien $\mathfrak{P} = (\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi}$ und $\mathfrak{P}' = (\mathcal{F}')_{\mathcal{F}_\pi}$ zwei Mikroprimstellen aus $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi)$. Da $K^{2*}|K$ lokal unverzweigt ist, entsprechen sie im Wesentlichen den $G_{\mathcal{F}_\pi}$-Konjugationsklassen zweier minimaler Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}'$. Die beiden Mikroprimstellen sollen die auf dasselbe Element des projektiven Limes, das heißt auf dieselbe Abfolge von Mikroprimstellen, abgebildet werden. Das bedeutet, für alle $f \geq 1$ gilt $(\mathcal{F}_f)_f = (\mathcal{F}'_f)_f$, das heißt, $\mathcal{F}_f \sim_f \mathcal{F}'_f$, wobei $\mathcal{F}_f := \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$, $\sim_f := \sim_{\mathcal{F}_\pi(f)}$ und $()_f := ()_{\mathcal{F}_\pi(f)}$ bezeichne. Bei den Übergängen $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f')}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f')) \twoheadrightarrow \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ bleibt der Grad der Mikroprimstellen fast immer erhalten. Also existiert ein f_0 so, dass für alle $f \geq f_0$ die Frobeniuskörper $\mathcal{F}_f$ und $\mathcal{F}'_f$ minimal sind. Im Folgenden sei ohne Einschränkung stets f ein Vielfaches von f_0. Da $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)$ lokal unverzweigt ist, gibt es dann ein

$\sigma_f \in G_f := G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))$ mit $\sigma_f(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}'_f$.
Sei $H_f := \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_f, \mathcal{F}'_f) := \{\sigma \in G_f \mid \sigma(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}'_f\} = \{\sigma \in G_f \mid \sigma\varphi_f\sigma^{-1} = \varphi'_f\}$, wobei $\mathcal{F}_f = \mathrm{Fix}(\varphi_f)$. Es ist $\sigma_f \in H_f$. Bezüglich der stetigen Konjugationsabbildung $\Phi_{\varphi_f} : G_f \to G_f$, $\Phi_{\varphi_f}(\sigma) := \sigma\varphi_f\sigma^{-1}$ ist $H_f = \Phi_{\varphi_f}^{-1}(\varphi'_f) \subset G_f$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen in einem Hausdorffraum, also kompakt. Genauer sieht man $H_f = \sigma_f \cdot G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_f)$: Zwei Elemente aus H_f unterscheiden sich um einen Automorphismus $\tau \in G_f$, der den Körper $\mathcal{F}_f$ in sich überführt. Dann ist $\mathcal{F}_f|\mathrm{Fix}(\tau)$ unverzweigt ([Meh03] Satz 4.1, hier Hilfssatz 3.22), also $\mathcal{F}_f = \mathrm{Fix}(\tau)$, da $\mathcal{F}_f$ ein minimaler Frobeniuskörper ist.
Für $f|f'$ ist die Einschränkung $H_{f'} \to H_f$, $\sigma_{f'} \mapsto \sigma_{f'}|_{\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}}$ wohldefiniert: Schneidet man in $\sigma_{f'}(\mathcal{F}_{f'}) = \mathcal{F}'_{f'}$ beide Seiten mit $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$, dann folgt wegen der Normalität von $\mathcal{F}_\pi(f'))^{1*}$ die Gleichung $\sigma_{f'}(\mathcal{F}_{f'}) \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*} = \sigma_{f'}(\mathcal{F}_{f'}) \cap \sigma_{f'}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}) = \sigma_{f'}(\mathcal{F}_{f'} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}) = \sigma_{f'}(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}'_f = \mathcal{F}'_{f'} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$, also ist $\sigma_{f'}|_{\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}} \in H_f$. Damit bilden die Mengen H_f mit den Einschränkungsabbildungen ein projektives System kompakter nichtleerer Mengen, und der projektive Limes $\varprojlim_f H_f$ ist nach [Neu92] Satz 2.3 ebenfalls kompakt und nichtleer.

Sei $(\sigma_f)_f \in \varprojlim_f H_f$. Für alle $x \in K^{2*} = \bigcup \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ sei $\sigma(x) := \sigma_f(x)$, falls $x \in \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$. Das ist ein wohldefiniertes Element aus $G(K^{2*}|K)$, da die σ_f auseinander durch Einschränkung hervorgehen. Ist $x \in \mathcal{F}_\pi = \bigcup_f \mathcal{F}_\pi(f)$, so ist bereits $x \in \mathcal{F}_\pi(f)$ für geeignetes f, also $\sigma_f(x) = x$. Damit $\sigma(x) = x$ für alle $x \in \mathcal{F}_\pi$, das heißt, $\sigma \in G(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi)$.
Schließlich gilt $\sigma(\mathcal{F}_f) = \sigma_f(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}'_f$ für alle f, und deshalb $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\bigcup_f \mathcal{F}_f) = \bigcup_f \sigma(\mathcal{F}_f) = \bigcup_f \mathcal{F}'_f = \mathcal{F}'$. Das bedeutet $\mathcal{F} \sim_{\mathcal{F}_\pi} \mathcal{F}'$, damit $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$. □

4.29 Folgerung: Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(K^{2*}|\mathcal{F}_\pi)[m] \leftrightarrow \varprojlim_f \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[m].$$

Beweis: Da der Grad der Mikroprimstellen innerhalb des projektiven Limes allenfalls sinken kann, ist für $f|f'$ die Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f')}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f'))[m] \to \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[m]$ wohldefiniert. Die Injektivität aus Satz 4.28 bleibt erhalten. Im projektiven Limes $\varprojlim_f \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[m]$ haben offenbar alle Abfolgen begrenzten Grad, und wegen 4.27 ist die Abbildung surjektiv. □

4.30 Hilfssatz: An das Diagramm aus Folgerung 4.23 kann man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f')}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f')) & \longleftrightarrow & G(\mathcal{F}_\pi(f')^{\mathrm{nr}}|\mathcal{F}_\pi(f')) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f'))^{\mathrm{nr}}) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle (\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi(f')} \mapsto (\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*})_{\mathcal{F}_\pi(f)}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \bar{N}} \\
\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)) & \longleftrightarrow & G(\mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}}|\mathcal{F}_\pi(f)) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))^{\mathrm{nr}})
\end{array}$$

anschließen, wobei $\bar{N}$ die von der Ausdünnung N induzierte Abbildung ist.
Beweis: Nach Folgerung 3.75 hat man für eine APF-Erweiterung $L|K$ die Bijektionen $\mathrm{spec}_L(L^{1*}|L) \leftrightarrow \mathrm{spec}(\mathbb{X}_K(L)^{1*}|\mathbb{X}_K(L)) \leftrightarrow G(L^{\mathrm{nr}}|L) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(L)^{\mathrm{nr}})$. Die Grundlage

für die Abbildung in der oberen Zeile des Diagramms ist, dass einem $\mathcal{F}_\pi(f')$ umfassenden Frobeniuskörper $\mathcal{F}$ innerhalb $\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}$ ein Primelement in $\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f'))^{\mathrm{nr}}$ zugeordnet wird. Es entsteht durch die universellen Normen der Erweiterungen $\mathcal{F}|\mathcal{F} \cap (E')^{\mathrm{nr}}$ für alle $E' \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_\pi(f')|K)$. Da $f_{\mathcal{F}|M}$ endlich ist, befindet sich das Primelement bereits in $\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f'))^{f_{\mathcal{F}|M}} = \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f')^{f_{\mathcal{F}|M}})$. In der unteren Zeile geht man von dem Körper $\mathcal{F}\cap\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ aus. Er enthält $\mathcal{F}_\pi(f')\cap\mathcal{F}_\pi(f)^{1*} \supseteq \mathcal{F}_\pi(f)$ und ist ein Frobeniuskörper innerhalb $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ nach Hilfssatz 3.2. Ihm wird ein Primelement in $\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))^{\mathrm{nr}}$ zugeordnet, dieses entsteht durch die universellen Normen der Erweiterungen $\mathcal{F}\cap\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}\cap\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}\cap E^{\mathrm{nr}}$ für alle $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_\pi(f)|K)$. Dieses befindet sich bereits in $\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))^{f_{\mathcal{F}|M}} = \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f)^{f_{\mathcal{F}|M}})$, da $\mathcal{F}|\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ reinverzweigt ist. Nun sind alle $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_\pi(f)|K)$ auch in $\mathcal{E}(\mathcal{F}_\pi(f')|K)$. Die Körper $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ sind nach Hilfssatz 3.3 beide so groß, dass die universelle Norm eindeutig wird. Damit bestimmen die beiden Körper dieselbe universelle Norm, und die beiden Primelemente entstehen auseinander durch die Ausdünnung $N : \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f')^{f_{\mathcal{F}|M}}) \to \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f)^{f_{\mathcal{F}|M}})$, das heißt, das Diagramm ist kommutativ. □

<u>**4.31 Folgerung:**</u> An das dem projektiven Limes aus Folgerung 4.29 zugrundeliegende kommutative Diagramm für $m = 1$ kann man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f')}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f'))[1] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "(\mathcal{F})_{\mathcal{F}_\pi(f')}\mapsto(\mathcal{F}\cap\mathcal{F}_\pi(f)^{1*})_{\mathcal{F}_\pi(f)}"] & \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f'))) \arrow[d, "N"] \\
\operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1] \arrow[r, leftrightarrow] & \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f)))
\end{tikzcd}$$

anschließen, wobei $N : \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f')) \to \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))$ die Ausdünnung ist.

4.5 Laubies Thetaabbildungen

In diesem Abschnitt wird eine Idee aus der nichtabelschen lokalen Klassenkörpertheorie im Zusammenhang mit Mikroprimstellen skizziert, die nicht zum Hauptergebnis dieser Arbeit beiträgt. Die Grundlage ist der Artikel [Lau07] von François Laubie.
Sei K ein lokaler Körper mit endlichem Restkörper $\kappa_K \cong \mathbb{F}_q$ mit $q = p^f$, wobei die Primzahl $p = \operatorname{char}(\kappa_K)$.

<u>**4.32 Definition:**</u> Eine **Lubin-Tate-Zerfällung** von K ist ein Frobeniusautomorphismus $\phi \in G_K$, der einen Schnitt der exakten Folge

$$0 \to I_K \to G_K \to \hat{\mathbb{Z}} \to 0$$

bestimmt, wobei $I_K := G(K^{\mathrm{sep}}|K^{\mathrm{nr}}) = G_K^0$ die Trägheitsgruppe bezeichnet. Dabei gilt $\phi \mapsto 1 \in \hat{\mathbb{Z}}$, das heißt, bei der Restriktion $G(K^{\mathrm{sep}}|K) \to G(K^{\mathrm{nr}}|K)$ wird ϕ auf den Frobeniusautomorphismus von $G(K^{\mathrm{nr}}|K)$ abgebildet, ist also ein Frobeniuslift.

<u>**4.33 Bemerkung:**</u> Der Fixkörper $\mathcal{F} := \operatorname{Fix}(\phi)$ von ϕ ist ein Frobeniuskörper mit $f_{\mathcal{F}|K} = 1$, also ein Komplement von K^{nr} innerhalb $\bar{K}|K$, und bestimmt eine K-Mikroprimstelle vom Grad 1. Dieser Standpunkt sei hier **Basispunktansatz** genannt. Er wird in [Neu94], [KS96] und [Lau07] verwendet.

4.34 Definition: Die Wahl der Lubin-Tate-Zerfällung ϕ legt ein normverträgliches System von Primelementen $\pi_E \in E$ für alle $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F}|K)$ fest: π_E ist die universelle Norm der Erweiterung $\mathcal{F}|E$ (vgl. Hilfssatz 3.3). Da es zu jedem $E' \in \mathcal{E}(K)$ ein $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F}|K)$ mit $E^{\mathrm{nr}} \supset E'$ gibt, ist bereits eine Markierung $\{E' \mapsto \pi_{E'} \mid E' \in \mathcal{E}(K)\}$ bestimmt. Dies entspricht einer K-Markierung vom Grad 1, denn $f_{\mathcal{F}|K} = 1$ und alle π_E liegen bereits in E, und ist eine Lubin-Tate-Markierung (Definition 3.10(v)).

4.35 Definition: Eine separable Erweiterung $L|K$ heißt **kompatibel** (mit ϕ), falls $f := f_{L|K} < \infty$ und $L \subseteq \mathcal{F}K^f$.

4.36 Folgerung: Für den Normenkörper $\mathbb{X}_K(L)$ einer arithmetisch proendlichen, kompatiblen Galoiserweiterung L eine ist die Isomorphie zum Laurentreihenkörper $\kappa((X))$ eindeutig dadurch, dass das durch die erhaltenen Primelemente π_E bestimmte Primelement $\hat{\pi}$ im Normenkörper $\mathbb{X}_K(L)$ auf die Potenzreihe X abgebildet wird.

4.37 Bemerkung (Motivation): Die Galoisgruppe $G(L|K)$ identifiziert sich mit einer Untergruppe der Automorphismengruppe des Körpers $\kappa_L((X))$: Ein Automorphismus $\sigma \in G(L|K)$ operiert mit Hilfe der Lubin-Tate-Zerfällung auf den Koeffizienten einer Potenzreihe:

$$\kappa_L((X)) \ni h(X) \mapsto (\phi^\nu h) \circ \varphi_\sigma(X) \in \kappa_L((X)).$$

Der Automorphismus σ wirkt auf dem Restkörper κ_L wie $\phi^\nu := \sigma|_{L\cap K^{\mathrm{nr}}}$, $\nu \in \mathbb{Z}/f_L\mathbb{Z}$, also wirkt σ auf der Potenzreihe h durch Anwendung von ϕ^ν auf deren Koeffizienten. Sei $\varphi_\sigma(X) \in \kappa_L((X))$ die Potenzreihe, die die Wirkung des Automorphismus σ auf dem Primelement $\hat{\pi}$ beschreibt, das heißt die Gleichung $\sigma(\hat{\pi}) = \varphi_\sigma(\hat{\pi})$ erfüllt. Die Potenzreihe $\varphi_\sigma(X)$ ist eindeutig bestimmt und muss ein Primelement von $\kappa_L((X))$ sein, also zu $X \cdot \kappa_L[[X]]^\times$ gehören, und das Element $\sigma(\hat{\pi})$ geht bei obiger Isomorphie in die Potenzreihe $\varphi_\sigma(X)$ über. Laubie definiert gleich $\sigma(X) := \varphi_\sigma(X)$.

Auf diese Weise ist der Automorphismus von $\kappa_L((X))$ voll bestimmt, und alle diese bilden eine Gruppe. Man beschränkt sich dann auf das Paar $(\nu, \varphi_\sigma) \in \mathbb{Z}/f_L\mathbb{Z} \times X \cdot \kappa_L[[X]]^\times$. Wendet man σ auf einen weiteren Automorphismus τ an, zu dem das Paar (μ, φ_τ) gehört, ergibt sich $\varphi_{\sigma\tau}(\hat{\pi}) = (\phi^\nu \varphi_\tau \circ \varphi_\sigma)(\hat{\pi})$.

Der Gruppenoperation $\sigma\tau$ (Hintereinanderausführung) in der Galoisgruppe entspricht also in der Menge der Paare die Verknüpfung $(\nu, \varphi_\sigma)(\mu, \varphi_\tau) := (\nu + \mu, \phi^\nu \varphi_\tau \circ \varphi_\sigma)$. Damit wird $\sigma \mapsto (\nu, \varphi_\sigma)$ ein Homomorphismus, und das Bild von $G(L|K)$ in $\mathbb{Z}/f_L\mathbb{Z} \times X \cdot \kappa_L[[X]]^\times$ wird mit $\mathcal{G}_L(K, \phi)$ bezeichnet. Es ist mit der angegebenen Verknüpfung isomorph zu $G(L|K)$ und dient als Modellgruppe dafür.

Ist eine weitere arithmetisch proendliche, kompatible Galoiserweiterung $M|K$ mit $M|L|K$ gegeben mit der Modellgruppe $\mathcal{G}_M(K, \phi)$ für $G(M|K)$, dann sollten die Modellgruppen bezüglich der Einschränkung verträglich sein. Man sucht Abbildungen, die das folgende Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccccc}
G(M|K) & \longrightarrow & \mathcal{G}_M(K,\phi) & & \subset \mathbb{Z}/f_M\mathbb{Z} \times X \cdot \kappa_M[[X]]^\times \\
\downarrow{\scriptstyle .|L} & & \downarrow & & \\
G(L|K) & \longrightarrow & \mathcal{G}_L(K,\phi) & & \subset \mathbb{Z}/f_L\mathbb{Z} \times X \cdot \kappa_L[[X]]^\times
\end{array}$$

Sei $\sigma \in G(M|K)$. Dann hat man das zugehörige Paar $(\nu, \varphi_\sigma) \in \mathbb{Z}/f_M\mathbb{Z} \times X \cdot \kappa_M[[X]]^\times$. Andererseits gehört zu $\sigma|_L \in G(L|K)$ das Paar $(\overline{\nu}, \varphi_{\sigma|_L}) \in \mathbb{Z}/f_L\mathbb{Z} \times X \cdot \kappa_L[[X]]^\times$. Die Abbildung $\nu \mapsto \overline{\nu}$ ist die kanonische Projektion $\mathbb{Z}/f_M\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/f_L\mathbb{Z}$. Schwieriger ist dagegen ist die Potenzreihenabbildung $\varphi_\sigma \mapsto \varphi_{\sigma|_L}$. Diese wird von Laubie mit $\vartheta_{M|L}$ bezeichnet und ergibt sich aus der Theorie der Normenkörper.

4.38 Bemerkung (Vorbetrachtung): Bei der Erweiterung $K^{\mathrm{nr}}L|K$ ist der Körper K^{nr} nicht vollständig, also nicht als Grundkörper für eine Normenkörperbildung geeignet. Man geht daher zur Erweiterung $\tilde{K}L|\tilde{K}$ über, bei der $\tilde{K}$ den algebraisch abgeschlossenen Restkörper $\overline{\mathbb{F}_q}$ hat. Zusätzlich sei $K^{\mathrm{nr}}L|K$ galoissch (dies ist für $L = M_f^{(n)}$ erfüllt).

Der Normenkörper $\mathbb{X}_{\tilde{K}}(\tilde{K}L)$ identifiziert sich mit der Vervollständigung $\widetilde{\mathbb{X}_K(L)} \subset \widetilde{\mathbb{X}_K(L)}^{\mathrm{sep}}$ der maximal unverzweigten Erweiterung $\mathbb{X}_K(L)^{\mathrm{nr}} \subset \mathbb{X}_K(L)^{\mathrm{sep}}$, letztlich mit $\overline{\mathbb{F}_q}((X))$. Für einen größeren Körper $M|L|K$, der die genannten Voraussetzungen an L erfüllt, ergibt sich auch $\mathbb{X}_{\tilde{K}}(\tilde{K}M) \cong \overline{\mathbb{F}_q}((X))$.

4.39 Definition: Man hat die **Ausdünnung** oder **kanonische Projektion** zwischen Normenkörpern

$$N := \tilde{N}_{M|L} : \mathbb{X}_{\tilde{K}}(\tilde{K}M)^\times := \varprojlim_{E \in \mathcal{E}(\tilde{K}L|\tilde{K})} E^\times \to \mathbb{X}_{\tilde{K}}(\tilde{K}L)^\times := \varprojlim_{F \in \mathcal{E}(\tilde{K}M|\tilde{K})} F^\times,$$

weil das projektive System $\mathcal{E}(\tilde{K}L|\tilde{K})$ ein Teilsystem von $\mathcal{E}(\tilde{K}M|\tilde{K})$ ist.

4.40 Definition: Die **Thetaabbildung** $\vartheta := \vartheta_{M|L}$ sei diejenige, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_{\tilde{K}}(\tilde{K}M)^\times \arrow[r, "\mathrm{ev}_{\hat{\pi}_M}", "\cong"'] \arrow[d, "N"] & \overline{\mathbb{F}_q}((X))^\times \arrow[d, "\vartheta"] \\
\mathbb{X}_{\tilde{K}}(\tilde{K}L)^\times \arrow[r, "\cong", "\mathrm{ev}_{N(\hat{\pi}_L)}"'] & \overline{\mathbb{F}_q}((X))^\times
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht, also $N(\varphi(\hat{\pi}_M)) = \vartheta(\varphi)(\hat{\pi}_L)$, da $N(\hat{\pi}_M) = \hat{\pi}_L$.

4.41 Bemerkung: Da die Normabbildungen des projektiven Limes multiplikativ sind, ist die kanonische Projektion N multiplikativ, somit ist auch ϑ verträglich mit der gewöhnlichen Multiplikation von Potenzreihen: $\vartheta(\varphi \cdot \psi) = \vartheta(\varphi) \cdot \vartheta(\psi)$. Es gilt $N(\hat{\pi}_M) = \hat{\pi}_L$, somit ist $\vartheta(X) = X$.

4.42 Bemerkung: Zurück zur Situation aus Hilfssatz 4.31: Die Menge $\mathscr{P}(\mathbb{X}_K(L))$ der Primelemente des Normenkörpers entspricht bei der Identifizierung mit dem Laurentreihenkörper $\kappa_L((X))$ der Menge $X \cdot \lambda[[X]]^\times$. Der Körper $\mathbb{X}_K(L)^{\mathrm{nr}}$ ist zwar gleich $\mathbb{X}_{L|K}(L^{\mathrm{nr}})$, lässt sich aber nicht direkt als Normenkörper aus L^{nr} bilden, da dies keine APF-Erweiterung von K ist. Jedoch kann man die unverzweigten Erweiterungen L^n vom Grad n von L betrachten. Diese sind immernoch APF über K, es gilt $\bigcup_n L^n = L^{\mathrm{nr}}$ und $\mathbb{X}_K(L)^{\mathrm{nr}} = \varinjlim_n \mathbb{X}_K(L^n)$.
Sei λ_n der Restkörper von L^n. Dann identifiziert sich $\mathbb{X}_K(L^n)$ mit $\lambda_n((X))$ und $\mathscr{P}(\mathbb{X}_K(L^n))$ mit $X \cdot \lambda_n[[X]]^\times$. Also ist $\mathscr{P}(\mathbb{X}_K(L)^{\mathrm{nr}}) = \bigcup_n X \cdot \lambda_n[[X]]^\times$. Es gilt $\overline{\kappa}_L = \bigcup_n \lambda_n$. Die Teilmenge

$\bigcup_n X \cdot \lambda_n[[X]]^\times$ von $X \cdot \overline{\kappa}_L[[X]]^\times$ ist genau diejenige mit: Für eine feste Potenzreihe liegen sämtliche Koeffizienten bereits in einem geeigneten Körper λ_n. Unter Berücksichtigung der Operation von $\Gamma_L := G(L^{\mathrm{nr}}|L) \cong G(\mathbb{X}_K(L)^{\mathrm{nr}}|\mathbb{X}_K(L)) \cong G(\overline{\kappa}_L|\kappa_L)$ ergibt sich:

$$\mathrm{spec}_L(L^{1*}|L) \longleftrightarrow \Gamma_L \setminus X \cdot \bigcup_n \lambda_n[[X]]^\times.$$

4.43 Bemerkung: An das kommutative Diagramm aus Hilfssatz 4.30 kann man zwar wie folgt anschließen:

$$\begin{tikzcd}
G(\mathcal{F}_\pi(f')^{\mathrm{nr}}|\mathcal{F}_\pi(f')) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f'))^{\mathrm{nr}}) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & G(\overline{\kappa}|\mu) \setminus X \cdot \bigcup_n \mu_n[[X]]^\times \arrow[d, dotted, "(?)"] \\
G(\mathcal{F}_\pi(f)^{\mathrm{nr}}|\mathcal{F}_\pi(f)) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))^{\mathrm{nr}}) \arrow[r, leftrightarrow] & G(\overline{\kappa}|\mu) \setminus X \cdot \bigcup_n \mu_n[[X]]^\times
\end{tikzcd}$$

Aber ohne den Basispunkt fehlt eine kanonische Abbildung (?).

5 Colemantheorie im K_0-Fall

In diesem Kapitel werden Ideen der Colemantheorie im K_0-Fall aus Kapitel 3 verfolgt. Dadurch lässt sich später die Verträglichkeit normischer Lubin-Tate-Potenzreihen expliziter angeben. Mit einem Basispunktansatz könnte das in einem Spezialfall auch mit der Thetaabbildung geschehen. Die Grundlage ist der Artikel [Col79] "Division Values in Local Fields" von Robert F. Coleman und die Kapitel 5 und 8 aus dem Buch [Iwa86] von Kenkichi Iwasawa. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind Satz 5.33, Folgerung 5.40 und Satz 5.51.

Ist K ein lokaler Körper und $\pi \in K$ ein Primelement, kann man mit Hilfe der Colemanpotenzreihen einen Isomorphismus zwischen dem Normenkörper $\mathbb{X}_K(K_\pi)$ der maximal abelsch reinverzweigten Erweiterung von K mit universeller Norm π und dem Körper $\kappa((X))$ der Laurentreihen über dem Restkörper von K konkret angeben:

Sei eine Lubin-Tate-Potenzreihe $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$ und ein Erzeuger w des Tatemoduls T_l von l gewählt, ferner $\mathcal{C}(K, l)$ die Menge der Colemanpotenzreihen zu l mit Koeffizienten in K

$$\mathbb{X}_K(K_\pi) \underset{\mathcal{C}_{l,w}}{\overset{\mathrm{ev}_w}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}(K, l) \underset{\mathrm{mod}\ \pi}{\overset{\mathcal{N}_l^\infty}{\rightleftarrows}} \kappa((X))$$

Nimmt man statt K die unverzweigte Erweiterung K^f vom Grad f, ergibt sich nach Wahl von $l_f \in \mathfrak{F}(K^f, \pi, q^f)$ und eines Erzeugers w_f von T_{l_f} in gleicher Weise der Isomorphismus

$$\mathbb{X}_K(K_\pi^f) \cong \mathbb{X}_{K^f}(K_\pi^f) \underset{\mathcal{C}_{l_f,w_f}}{\overset{\mathrm{ev}_{w_f}}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}(K^f, l_f) \underset{\mathrm{mod}\ \pi}{\overset{\mathcal{N}_{l_f}^\infty}{\rightleftarrows}} \kappa_f((X)).$$

Der K_0-Fall wird angewendet, indem das hiesige Paar (K^f, K) für das Paar (K, K_0) des K_0-Falls eingesetzt wird. Wegen $\pi \in K$ ist $K(\pi) = K$, also ist der Körper $\mathcal{F}_\pi$ aus Definition 3.62 ein Komplement zu K^{nr} innerhalb $K^{1*}|K$. Die für $f > 1$ nichtabelsche Erweiterung $\mathcal{F}_\pi(f) = \mathcal{F}_\pi \cap K_\pi^f$ von K geht nach unverzweigter Verschiebung in die abelsche Erweiterung $K_\pi^f|K^f$ über. Sei nun $l_f \in \mathfrak{F}(K, \pi, q^f) \subseteq \mathfrak{F}(K^f, \pi, q^f)$ gewählt, ferner ein mit $\mathcal{F}_\pi$ verträglicher Erzeuger w_f von T_{l_f}, dann lässt sich der durch die Colemanpotenzreihen vermittelte Isomorphismus $\mathbb{X}_K(K_\pi^f) \cong \kappa_f((X))$ auf die Teilkörper $\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f)) \cong \kappa((X))$ herunterdrücken:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_{K^f}(K_\pi^f) \arrow[r, shift right, "\mathcal{C}_{l_f,w_f}"'] & \mathcal{C}(K^f, l_f) \arrow[l, shift right, "\mathrm{ev}_{w_f}"'] \arrow[r, shift left, leftarrow, "\mathcal{N}_{l_f}^\infty"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{mod}\ \pi"'] & \kappa_f((X)) \\
\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f)) \arrow[u, hook] \arrow[r, shift right, "\mathcal{C}_{l_f,w_f}"'] & \mathcal{C}(K, l_f) \arrow[u, hook] \arrow[l, shift right, "\mathrm{ev}_{w_f}"'] \arrow[r, shift left, leftarrow, "\mathcal{N}_{l_f}^\infty"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{mod}\ \pi"'] & \kappa((X)) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

5.1 Komplemente von K^f in K_π^f

Sei K ein lokaler Körper, $q := \#\kappa_K$ seine Restkörperordnung. Sei $f \in \mathbb{N}$ fest und $K^f|K$ die unverzweigte Erweiterung vom Grad f, also $\#\kappa_{K^f} = q^f$, und $\pi \in K$ ein festes Primelement. Innerhalb der Menge $\mathfrak{F}(K, \pi, q)$ der Lubin-Tate-Potenzreihen zu π (Definition 3.45) sind die Lubin-Tate-Polynome der Form

$$l(X) = uX^q + \pi(a_{q-1}X^{q-1} + ... + a_2X^2) + \pi X$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathcal{O}_K$ und einer Einseinheit $u \in \mathcal{O}_K$, das heißt, $u \equiv 1 \mod \pi$.
In der Menge $\mathfrak{F}(K, \pi, q^f)$ ($l(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $l(X) \equiv \pi X \mod \deg 2$ und $l(X) \equiv X^{q^f} \mod \pi$) sei $l(X) \in \mathcal{O}_K[X]$ nun ein Polynom von der Form

$$l(X) = X^{q^f} + \pi(a_{q^f-1}X^{q^f-1} + ... + a_2X^2) + \pi X$$

vom Grad q^f.

5.1 Bemerkungen: (i) Das Primelement $\pi \in K$ ist auch Primelement in der unverzweigten Erweiterung K^f. Die betrachteten Polynome aus $\mathfrak{F}(K, \pi, q^f)$ mit dem erhöhtem Grad q^f haben erst recht Koeffizienten in $\mathcal{O}_{K^f}$ und sind bezogen auf K^f Lubin-Tate-Polynome zu π, also aus $\mathfrak{F}(K^f, \pi, q^f)$, der Menge der Lubin-Tate-Potenzreihen zu π über K^f.

(ii) Im Artikel [Sha85] ”Relative Lubin-Tate Groups” von Ehud de Shalit werden für ein festes f, ein festes $\xi \in K$ mit $\nu(\xi) = f$ und ein festes Primelement π_f von K^f die Potenzreihen aus $\mathfrak{F}(K^f, \pi_f, q)$ mit der Verträglichkeitseigenschaft $N_{K^f|K}(\pi_f) = \xi$ behandelt.

5.2 Folgerung: Nach der Lubin-Tate-Theorie (siehe 3.60) erhält man mit jeder Potenzreihe l aus $\mathfrak{F}(K^f, \pi, q^f)$ den nur von π abhängenden Turm der n-ten Teilungskörper $K_n^f = K^f(W_l^n)$ und die maximal abelsche reinverzweigte Erweiterung $K_\pi^f := K_\infty^f := \bigcup_{n\geq 0}^\infty K_n^f$ mit der universellen Norm π. Nun soll dies über K selbst nachgeahmt werden.

5.3 Definition: Sei

$$l^{(n)}(X) := l(l(...(X)...))$$

die n-te Iteration des Polynoms $l(X) \in \mathfrak{F}(K, \pi, q^f)$, dabei soll $l^{(0)}(X) := X$ sein. Ferner sei

$$\phi_n(X) := l^{(n)}(X)/l^{(n-1)}(X),$$

das ist ein Eisensteinpolynom vom Grad $(q^f)^{n-1}(q^f - 1)$. Mit $l(X)$ hat auch $\phi_n(X)$ Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$. Über $\overline{K}$ zerfällt $\phi_n(X)$ in Linearfaktoren. Die Nullstellen λ_n von $\phi_n(X)$ sind nach Konstruktion diejenigen von $l^{(n)}(X)$, die nicht bereits Nullstellen von $l^{(n-1)}(X)$ sind, also primitive n-te Teilungspunkte: $\lambda_n \in \tilde{W}_l^n$.
Sei $K_{f,n} := K(\lambda_n)$ der Körper, der durch Adjunktion einer gewählten Nullstelle $\lambda_n \in \overline{K}$ von $\phi_n(X)$ zum Körper K (anstelle von K^f) entsteht. Die Erweiterung $K_{f,n}|K$ ist reinverzweigt vom Grad $(q^f)^{n-1}(q^f - 1)$. Die Nullstelle λ_n wird ein Primelement von $K_{f,n}$. Die Körpererweiterung $K_{f,n}|K$ ist nicht normal, sie hängt von der Wahl der Nullstelle λ_n

ab.

5.4 Bemerkung: Über K^f erzeugt eine Nullstelle von $\phi_n(X)$ nach der Lubin-Tate-Theorie eine reinverzweigte abelsche Erweiterung K^f_n von demselben Grad $(q^f)^{n-1}(q^f-1)$ mit universeller Norm π. Insbesondere ist diese Erweiterung normal, also unabhängig von der Wahl der Nullstelle.

5.5 Hilfssatz: Der Körper $K_{f,n}$ ist zu K^f in K^f_n komplementär, das heißt,

$$K_{f,n}K^f = K^f_n \text{ und } K_{f,n} \cap K^f = K.$$

Beweis: Man hat das Bild

$$\begin{tikzcd} K_{f,n} \arrow[r] & K^f_n \\ K \arrow[u] \arrow[r] & K^f, \arrow[u, "\mathrm{ab}"'] \end{tikzcd}$$

in dem die senkrechten Erweiterungen reinverzweigt vom Grad $(q^f)^{n-1}(q^f-1)$ und die waagerechten unverzweigt vom Grad f sind. □

5.6 Bemerkung: Die zugehörigen Galoisgruppen sind $S_n := G(K^f_n|K_{f,n}) \cong G(K^f|K) \cong \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ und $H_n := G(K^f_n|K^f) \cong U(K^f)/U^n(K^f)$:

$$\begin{tikzcd} K_{f,n} \arrow[r, "S_n"] & K^f_n \\ K \arrow[u] \arrow[r] & K^f, \arrow[u, "H_n"'] \end{tikzcd}$$

Da die Nullstellen von $\phi_n(X)$ eine $G(K^f_n|K)$-Konjugationsklasse bilden, liefert die Konstruktion eine Konjugationsklasse von Komplementen von K^f in K^f_n, das heißt, zwei solcherart konstruierte Körper $K_{f,n}$ sind immer konjugiert durch ein Element aus $G(K^f_n|K)$, genauer genügt ein Element aus $G(K^f_n|K^f)$.

5.7 Bemerkung: Eine zum Normalteiler A im semidirekten Produkt $A \rtimes G$ komplementäre Untergruppe entspricht einem Schnitt s von G mit Werten in $A \rtimes G$. Dazu wird einem Schnitt s als Untergruppe das Bild von s zugeordnet, dieses wiederum bestimmt die Abbildung s dadurch, dass die Nachschaltung der kanonischen Projektion die Identität auf G ergibt. Sei also $S(G, A \rtimes G)$ die Menge aller Schnitte.
Ein solcher Schnitt ist ein Gruppenhomomorphismus der Form $s(g) = (c(g), g)$ mit einer Abbildung $c : G \to A$. Die Homomorphieeigenschaft $s(gg') = (c(gg'), gg') = (c(g), g)(c'(g), g) = s(g)s(g')$ von s ergibt für die Abbildung c die 1-Kozyklus-Eigenschaft $c(g) \cdot (g \circ c(g')) = c(gg')$.
Konjugierte Komplemente ergeben sich aus äquivalenten Schnitten bezüglich folgender Äquivalenzrelation: $s \sim s' :\Leftrightarrow \exists a \in A : s'(g) = a^{-1}s(g)a$, das heißt, sie unterscheiden sich um einen inneren Automorphismus. Genauer bedeutet dies $(c'(g), g) = (a^{-1}, 1)(c(g), g)(a, 1)$, also dass die 1-Kozyklen kohomolog sind: $c'(g) = a^{-1}c(g)g(a)$ (im Fall A abelsch: dass sie sich um einen 1-Korand unterscheiden). Insgesamt: $S(G, A \rtimes G)/\sim$

$\leftrightarrow H^1(G, A)$.

<u>5.8 Satz:</u> Die Menge der zu K^f in K_n^f komplementären Körper bildet eine $G(K_n^f|K^f)$-Konjugationsklasse von Körpern.

Beweis: Einem zu K^f in K_n^f komplementären Körper C_n entspricht eine zum Normalteiler $U(K^f)/U^n(K^f)$ in dem semidirekten Produkt $U(K^f)/U^n(K^f) \rtimes \mathbb{Z}/f\mathbb{Z} \cong G(K_n^f|K)$ komplementäre Untergruppe $G(K_n^f|C_n)$.

Die Anzahl der Konjugationsklassen von zu $U(K^f)/U^n(K^f)$ in $U(K^f)/U^n(K^f) \rtimes \mathbb{Z}/f\mathbb{Z} \cong G(K_n^f|K)$ komplementären Gruppen wird nach der Bemerkung 5.7 durch die Menge $H^1(G(K^f|K), U(K^f)/U^n(K^f))$ bestimmt. Es gelten $H^1(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}, U(K^f)) = \{1\}$ und $H^2(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}, U^n(K^f)) = \{1\}$ ([Neu92] S. 335 Korollar (1.2)). Der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz $U^n(K^f) \hookrightarrow U(K^f) \twoheadrightarrow U(K^f)/U^n(K^f)$ entnimmt man, dass auch die $H^1(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}, U(K^f)/U^n(K^f))$ trivial ist. Daher gibt es nur eine einzige Konjugationsklasse solcher Komplemente C_n. $\square$

<u>5.9 Folgerung:</u> Die Menge der zu K^f in K_n^f komplementären Körper ist genau die mit der Konstruktion erhaltene $G(K_n^f|K^f)$-Konjugationsklasse von Körpern.

<u>5.10 Hilfssatz:</u> Es gibt genau $(q^{f-1})^{n-1}\frac{(q^f-1)}{(q-1)} =: z(f,n)$ zu K^f in K_n^f komplementäre Körper.

Beweis: Um die Anzahl der Elemente einer Konjugationsklasse $\{\bar{u}S_n\bar{u}^{-1} \mid \bar{u} \in U(K^f)/U^n(K^f)\}$ eines Gruppenkomplements $S_n \cong \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ (entspricht später $G(K_n^f|K_{f,n})$) zu bestimmen, betrachte den Normalisator

$$N_n := \{\bar{u} \in U(K^f)/U^n(K^f) \mid \bar{u}S_n\bar{u}^{-1} = S_n\}$$

von S_n. Die Gruppe S_n wird erzeugt durch einen Frobeniuslift F, das heißt, $S_n = \langle F \rangle$. Es soll $\bar{u}\langle F \rangle \bar{u}^{-1} = \langle F \rangle$ gelten, also $\bar{u}F\bar{u}^{-1} = F$ gleichbedeutend mit $F\bar{u}F^{-1} = \varphi(\bar{u}) = \bar{u}$ mit dem Frobenius φ, weil $\bar{u} \in U(K^f)/U^n(K^f)$ ist. Das bedeutet, $\bar{u}$ muss gerade in $(U(K^f)/U^n(K^f))^{G(K^f|K)}$ sein.

Aus der Sequenz $U^n(K^f) \hookrightarrow U(K^f) \twoheadrightarrow U(K^f)/U^n(K^f)$ erhält man die Sequenz

$$U^n(K^f)^{G(K^f|K)} \hookrightarrow U(K^f)^{G(K^f|K)} \twoheadrightarrow (U(K^f)/U^n(K^f))^{G(K^f|K)},$$

weil $H^1(G(K^f|K), U^n(K^f))$ trivial ist.

Damit gilt $N_n = (U(K^f)/U^n(K^f))^{G(K^f|K)} \cong (U(K^f)^{G(K^f|K)}/U^n(K^f)^{G(K^f|K)} = U(K)/U^n(K)$.

Die surjektive Normabbildung $N_{K^f|K} : U(K^f)/U^n(K^f) \twoheadrightarrow U(K)/U^n(K)$ ergibt bei Einschränkung auf die Untergruppe N_n den Isomorphismus $N_{K^f|K} : N_n \xrightarrow{\sim} U(K)/U^n(K)$.

$$\begin{tikzcd}
K_{f,n} \arrow[r] & K^f_n \\
K_{1,n} \arrow[u] & \\
K \arrow[u] \arrow[u, bend left, "U(K)/U^n(K)"] \arrow[r] & K^f \arrow[uu] \arrow[uu, bend right, "U(K^f)/U^n(K^f)"']
\end{tikzcd}$$

Also ist die Zahl der Komplemente $(U(K^f)/U^n(K^f) : U(K)/U^n(K)) = \frac{(q^f)^{n-1}(q^f-1)}{q^{n-1}(q-1)} = (q^{f-1})^{n-1}\frac{(q^f-1)}{(q-1)}$ mit einem von n unabhängigen Proportionalitätsfaktor für die Anzahl der Komplemente. □

5.11 Hilfssatz: Für $n' \geq n$ liegen über jedem zu K^f in K^f_n komplementären Körper genau $(q^{f-1})^{n'-n}$ zu K^f in $K^f_{n'}$ komplementäre Körper.

Beweis: Man hat $z(f, n')$ Komplemente innerhalb $K^f_{n'}$ und $z(f, n)$ Komplemente innerhalb K^f_n. Das Komplement $C_{n'}$ in $K^f_{n'}$ enthält den Teilkörper $C_{n'} \cap K^f_n$, der ein Komplement innerhalb K^f_n ist:

$$\begin{tikzcd}
 & K^f(\infty) \\
C_{n'} \arrow[r] & K^f_{n'} \arrow[u] \\
C_{n'} \cap K^f_n \arrow[u] \arrow[r] & K^f_n \arrow[u] \\
K \arrow[u] \arrow[r] \arrow[r, bend right, "\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}"'] & K^f \arrow[u] \arrow[u, bend right, "U(K^f)/U^n(K^f)"'] \arrow[uu, bend right=50, "U(K^f)/U^{n'}(K^f)"'] \arrow[uuu, bend right=60, "U(K^f)"']
\end{tikzcd}$$

Klar ist $(C_{n'} \cap K^f_n) \cap K^f = C_{n'} \cap K^f = K$. Die Galoisgruppe des Körpers $C_{n'} \cap K^f_n$ wird von den Gruppen $U^{n'}(K^f) \rtimes \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ und $U^n(K^f) \rtimes 1$ erzeugt, ist also $U^n(K^f) \rtimes \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$. Dabei sei $U^n(K^f) := 1 + \mathcal{P}^n_{K^f} = 1 + \pi^n \mathcal{O}_{K^f}$ die Gruppe der Einseinheiten der Stufe n. Dem Kompositum mit K^f entspricht der Schnitt mit der Gruppe $U(K^f) \rtimes 1$, also $U^n(K^f) \rtimes 1$. Das ist genau die Galoisgruppe von K^f_n, somit gilt $(C_{n'} \cap K^f_n)K^f = K^f_n$, und $C_{n'} \cap K^f_n$ ist komplementär.

Aus einer solchen Situation $C_{n'} \supset C_n$ folgt andersherum, dass über jedem anderen C'_n in K^f_n wieder mindestens ein $C'_{n'}$ in $K^f_{n'}$ liegen muss: Da die Komplemente in K^f_n eine Konjugationsklasse bilden, existiert ein $\sigma \in G(K^f_{n'}|K))$ mit $\sigma(C_n) = C'_n$, somit $\sigma(C_{n'}) \supset C'_n$. Für zwei Komplemente $\tilde{C}_{n'} \neq C_{n'}$ über C_n folgt $\sigma(\tilde{C}_{n'}) \neq \sigma(C_{n'}) \supset C'_n$.

Auf diese Weise folgt, dass über jedem Komplement C_n gleich viele Komplemente in $K^f_{n'}$

liegen, und aus der Komplementanzahl folgt, dass es genau $z(f,n')/z(f,n) = (q^{f-1})^{n'-n}$ sind. $\square$

5.12 Folgerung: Insbesondere liegen über jedem Körper $K_{f,n}$ gleich viele Körper $K_{f,n+1}$, und zwar genau q^{f-1}.

5.13 Definition: Sei $\mathcal{F}_\pi$ ein Frobeniuskörper in K^{1*} mit universeller Norm $\pi \in K$ und $l \in \mathfrak{F}(K,\pi,q^f)$. Ein Erzeuger $w = (w_n)_n \in T_l$ heiße **verträglich** mit $\mathcal{F}_\pi$, falls $K(w) := K(w_n \mid n \in \mathbb{N}) = \mathcal{F}_\pi(f)$, das heißt, alle Komponenten w_n liegen in $\mathcal{F}_\pi(f) \subset \mathcal{F}_\pi$.

5.14 Folgerung: Benutzt man einen mit $\mathcal{F}_\pi$ verträglichen Erzeuger, kann man einen Körperturm $K_{f,n+1}|K_{f,n}|...|K_{f,2}|K_{f,1}|K$ bilden. Dieser hat als Vereinigung ein Komplement $C_\infty := K_{f,\infty} = \mathcal{F}_\pi(f)$ von K^f in $K^f_\infty = K^f_\pi$:

$$\begin{tikzcd} C_\infty \arrow[r] & K^f_\infty \\ K \arrow[u] \arrow[r] & K^f. \arrow[u, "\text{ab}"'] \end{tikzcd}$$

5.15 Folgerung: Da es jeweils nur genau eine einzige Konjugationsklasse von Komplementen gibt, führt Konstruktion aus Definition 5.3 für alle Potenzreihen $l(X) \in \mathfrak{F}(K,\pi,q^f)$, insbesondere Polynome der Form $l(X) = uX^{q^f} + \pi(a_{q^f-1}X^{q^f-1} + ... + a_2X^2) + \pi X \in \mathcal{O}_K[X]$ mit einer Einseinheit $u \in \mathcal{O}_K$, auf dieselbe Konjugationsklasse von Komplementen $K_{f,n}$ bzw. $K_{f,\infty}$.
Die Folge der Nullstellen $(\lambda_n \in \overline{K})_{n=1}^\infty$ der Eisensteinpolynome $\phi_n(X)$ wird zu einer Folge von Primelementen der Körper $K_{f,n} = K(\lambda_n)$, und es gilt $N_{K_{f,n}|K}(-\lambda_n) = \pi$ für alle $n \geq 1$.
Das ist kein Widerspruch im Fall normischer Lubin-Tate-Potenzreihen: Für ungerades q muss vor X^{q^f} der Koeffizient 1 stehen, und es gilt $N_{K_{f,n}|K}(-\lambda_n) = N_{K_{f,n}|K}(\lambda_n)$, für gerades q muss vor X^{q^f} der Koeffizient -1 stehen, und es gilt $N_{K_{f,n}|K}(\lambda_n) = \pi$.

5.16 Bemerkung (Ausblick): Jede Lubin-Tate-Potenzreihe aus $\mathfrak{F}(K^f,\pi,q^f)$ produziert über K^f durch Iteration die maximal abelsche reinverzweigte Erweiterung mit universeller Norm π. Dabei erhält man eine Folge von Primelementen $(\pi_n \in K^f_n)_n$ mit $\pi_0 = \pi \in K^f$. Später braucht man speziell normverträgliche Folgen innerhalb von $\mathcal{F}_\pi(f)$. Diese erhält man mit Hilfe normischer Lubin-Tate-Potenzreihen $l(X)$. Mit den normischen Lubin-Tate-Potenzreihen für ein festes f soll weitergearbeitet werden. Das Ziel ist es, mit f gegen ∞ zu gehen. Untersucht werden soll die Verträglichkeitseigenschaft für die normischen Lubin-Tate-Potenzreihen zu verschiedenen f, das heißt in der Situation $f|f'$, um den Vorgang $f \to \infty$ zu verstehen.
Die Erweiterung $K^f_\infty|K^f$ und jede der $K_{f,\infty}|K$, von denen die $\mathcal{F}_\pi$-verträgliche mit $K_{f,\infty,0}|K$ bezeichnet sei, sind arithmetisch proendlich. Also kann man zu den Normenkörpern übergehen: Zum einen $\mathbb{X}_{K^f}(K^f_\infty)$, zum anderen die "vielen" $\mathbb{X}_K(K_{f,\infty})$, welche alle zueinander konjugiert sind und unter denen wiederum $\mathbb{X}_0 := \mathbb{X}_0(f,\infty) := \mathbb{X}_K(K_{f,\infty,0})$ ausgezeichnet sei. Gleiches gilt für $K^f_n|K^f$ und jede der $K_{f,n}|K$, von denen wieder eine als $K_{f,n,0}|K$ ausgezeichnet werde. Wir haben die Normenkörper $\mathbb{X}_{K^f}(K^f_n)$, die Konjugationsklasse der

$\mathbb{X}_K(K_{f,\infty})$ mit dem ausgezeichneten $\mathbb{X}_0(f,n) := \mathbb{X}_K(K_{f,n,0})$. Die normischen Erzeuger $w = (w_n)_n$ können zu Primelementen im Normkörper aufgefüllt werden.
Man kann die Mengen $\mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K,\pi,q^f) \subset \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^f,\pi,q^f)$, allgemeiner auch $\mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^m,\pi,q^f)$ betrachten in den Fällen $f|m$ und $m|f$. Der Fall $f|m$ bedeutet, den ganzen Turm über K nach rechts bis zu K^m zu verschieben im Sinne von [Iwa86] Abschnitt 5.1. Man ist im abelschen Fall, insbesondere falls $m = f$. In dieser Arbeit wird der nichtabelsche Fall $m|f$ betrachtet, der aber "fastabelsch" ist in dem Sinne, dass er nach unverzweigter Verschiebung wieder abelsch wird.

$$\begin{tikzcd}
K_{f,\infty,0} \arrow[r] & K^f_\infty \\
K_{f,n,0} \arrow[r] \arrow[u] & K^f_n \arrow[u] \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K^f \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Nach Hilfssatz 3.79, das ist [MZ05] Proposition 6.3 im Fall $L := K^f$, hat man $G(K^f(\infty)|K^f)\backslash\mathscr{P}(\mathbb{X}_{K^f}(K^f(\infty))) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^f,\pi,q^f)$: Ein Primelement von $\mathbb{X}_{K^f}(K^f(\infty))$ entspricht einer normischen Folge von Primelementen, die auf π herunternormen. Nach [KS96] Lemma 0.3, welches [Col79] Theorem 16 (hier Hilfssatz 5.50) benutzt, gibt es zu einer solchen Folge eine einzige normische Lubin-Tate-Potenzreihe zu π. Solche Folgen ergeben dieselbe Lubin-Tate-Potenzreihe genau dann, wenn sie $G(K^f(\infty)|K^f)$-konjugiert sind. Dieses Ergebnis soll übertragen werden auf den Fall $\pi \in K$ und Potenzreihen bezüglich q^f statt q, das heißt, $\mathrm{Aut}_K(K_{f,\infty,0}) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_0) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K,\pi,q^f)$.
Ein Primelement von $\mathbb{X}_0$ ist eine normverträgliche Folge von Primelementen $\pi_n \in K_{f,n}$, die auf π herunternormen, das heißt, $\pi_0 = \pi$. Diese Folge ist auch normverträglich, wenn sie in den K^f_n betrachtet wird: $N_{K^f_{n+1}|K^f_n}(\pi_{n=1}) = N_{K_{f,n+1}|K_{f,n}}(\pi_{n+1}) = \pi_n$. Zu dieser Folge gibt es nach [KS96] Lemma 0.3 wieder eine einzige verträgliche Potenzreihe $\varphi(X) \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^f,\pi,q^f)$. Für ein festes $\sigma \in G(K^f|K)$ ist auch die Folge $(\sigma\pi_n)$ normisch, und $\sigma\varphi(X)$, wobei σ auf den Koeffizienten operiert, muss die einzige verträgliche Potenzreihe zur Folge $(\sigma\pi_n)$ sein.
Die Ordnung der Gruppe $G(K^f_n|K^f)$ ist $(q^f-1)q^{f(n-1)}$. Die Anzahl der "verschiedenen" Körper $K_{f,n}$ ist $(q^f-1)^{n-1}\frac{q^f-1}{q-1}$. Die Anzahl der Automorphismen, die den einzelnen Körper $K_{f,n}$ festlassen, ist also der Quotient $(q-1)q^{n-1}$ der beiden Zahlen. Das ist auch die Ordnung der Gruppe $G(K_{1,n}|K)$ also ist die Restriktion $\mathrm{Aut}_K(K_{f,n,0}) \to G(K_{1,n}|K)$ ein Isomorphismus für alle n. Im Limes für $n \to \infty$ ergibt sich, dass $\mathrm{Aut}_K(K_{f,\infty,0}) \to G(K_{1,\infty}|K)$ ein Isomorphismus ist.

5.2 Die Colemantheorie im K_0-Fall

Sei K ein lokaler Körper mit q-elementigem Restkörper. In [Col79] wird die Theorie für eine beliebige unverzweigte vollständige Erweiterung $H|K$ entwickelt und in [Sti02] für $H = \tilde{K} = \widehat{K^{\mathrm{nr}}}$ nachvollzogen. In[Iwa86] wird die Colemantheorie für Potenzreihen mit Koeffizienten im Bewertungsring $\mathcal{O}_K$ selbst vorgeführt. Das Ergebnis der Konstruktion sind wieder Potenzreihen mit Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass im K_0-Fall (Definition 3.49), also $K_0 \subseteq K$ unverzweigter Teilkörper mit Restkörperordnung q_0, wobei $q = q_0^{[K:K_0]}$, ferner $\pi \in K_0$ und $l \in \mathfrak{F}(K_0, \pi, q)$, die Konstruktionen von Coleman über K_0 bleiben. Deshalb wird auch nur vom K-Fall ausgegangen: Sei π ein Primelement aus K und $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$ fest gewählt. Es ist dann $[\pi]_l = l$ und $[\pi^n]_l = l^{(n)}$.

5.17 Definition ([Col79]): Zu einer Potenzreihe $g \in \mathcal{O}_K[[X]]$ wird zunächst das Produkt

$$\mathcal{L}_l(g)(X) := \prod_{w \in W_l^1} g(X +_l w) = \prod_{w \in W_l^1} g(F_l(X, w))$$

gebildet. Das w durchläuft die ersten Teilungspunkte, das heißt die Nullstellen von l, auch die Null, also q Elemente. Die Ausdrücke $F_l(X, w)$ sind Potenzreihen in X mit Koeffizienten in $\mathcal{O}_{K(w)}$. Die Körpererweiterung $K(w)|K$ ist normal und unabhängig von der Wahl eines Teilungspunktes $w \neq 0$. Das Produkt $\mathcal{L}_l(g)(X)$ der Potenzreihen $F_l(X, w)$ für alle w ist eine Potenzreihe, die invariant unter K-Automorphismen von $K(w)$ ist, da ein solcher die primitiven ersten Teilungspunkte nur vertauscht, es hat also wieder Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$. Nach [Col79] III Lemma 3 lässt sich das Produkt in eindeutiger Weise durch $[\pi]_l$ faktorisieren: Es gibt eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $\mathcal{N}(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ so, dass

$$\mathcal{N} \circ [\pi]_l,$$

wobei $\circ$ die Einsetzung von Potenzreihen bezeichnet. Die Potenzreihe $\mathcal{N}_l(g) =: \mathcal{N}$ heißt **Colemansche Norm** (bezüglich l) der Potenzreihe g, der Operator $\mathcal{N}_l$ heißt **Colemanscher Normoperator** zu l.

5.18 Definition ([Col79]): Eine Potenzreihe $g \in \mathcal{O}_K[[X]]$ heißt **Colemanpotenzreihe** zur Lubin-Tate-Potenzreihe l, falls sie invariant unter dem Colemanschen Normoperator ist:

$$\mathcal{N}_l(g) = g.$$

Die Menge dieser Colemanpotenzreihen sei mit $\mathcal{C}(K, l)$ bezeichnet. Ferner sei $\mathcal{C}(K_0, l) := \mathcal{C}(K, l) \cap \mathcal{O}_{K_0}((X))^\times$.

5.19 Bemerkung: Ab jetzt soll nur noch der K-Fall betrachtet werden. Dann ist $\mathcal{L}_l(g) \in \mathcal{O}_{K_1}[[X]]$ invariant unter $G(K_1|K)$, hat also Koeffizienten in K: Die Potenzreihen g und l haben Koeffizienten in K, sind also invariant. Der Teilungspunkt $w \in W_l^1$ ist Nullstelle eines Polynoms (Bemerkung 3.84) mit Koeffizienten in K, das Polynom ist also invariant. Alle w sind konjugiert über K, werden also von $\sigma \in G(K_1|K)$ in einander überführt, damit ist ${}^\sigma\mathcal{L}_l(g) = \mathcal{L}_l(g)$. Im K_0-Fall ist die rechte Seite sogar invariant unter $G(K_1|K_0)$: Dann haben g und l Koeffizienten in K_0, und w ist Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten in K_0. Dass $\mathcal{L}_l(g)$ Koeffizienten in K_0 hat, ist notwendig dafür, dass auch $\mathcal{N}_l(g)$ Koeffizienten in K_0 hat. Bei der Notation ist zu beachten: $K_1 = K(W_l^1)$, dagegen soll K_0 nicht $K(W_l^0) = K(0) = K$, sondern den unverzweigten Teilkörper bezeichnen. Nun soll anhand der Beweisschritte für die Faktorisierung in [Iwa86], S. 68-72, der K_0-Fall beobachtet werden. Sei zunächst k ein lokaler Körper, $\overline{k}$ ein fester algebraischer Abschluss und $\hat{\overline{k}}$ dessen Vervollständigung.

5.20 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 3.9): Sei $\alpha \in \mathcal{P}_{\hat{\overline{k}}}$ und $f(X) \in \mathcal{O}_{\hat{\overline{k}}}[[X]]$ mit $f(\alpha) = 0$. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{O}_{\hat{\overline{k}}}[[X]]$ mit $f(X) = (X - \alpha)g(X)$.

Beweis: Die Potenzreihe $f(X)$ ist von der Gestalt $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i X^i$, $\alpha_i \in \hat{\overline{k}}$. Für alle $i \geq 1$ sei

$$\beta_i := \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{i+j+1}\alpha^j.$$

gesetzt. Da $\alpha \in \mathcal{P}_{\hat{\overline{k}}}$ ist, konvergiert diese Summe in $\mathcal{O}_{\hat{\overline{k}}}$. Die Potenzreihe $g(X) := \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i X^i$ erfüllt $f(X) = (X - \alpha)g(X)$. □

5.21 Bemerkung: Im Fall $\alpha \in \mathcal{P}_{\overline{k}}$ und $f(X) \in \mathcal{O}_k[[X]]$ ist $g(X) \in \mathcal{O}_{k(\alpha)}[[X]]$. Die Erweiterung $k(\alpha)|k$ ist endlich, da α algebraisch über k ist, aber sie ist im allgemeinen nicht normal (außer im trivialen Fall $\alpha \in \mathcal{P}_k$).

5.22 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 3.10): Sei $h(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - \alpha_i) \in \mathcal{O}_k[X]$ normiert mit paarweise verschiedenen $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in \mathcal{P}_{\overline{k}}$. Sei $f(X)$ eine Potenzreihe aus $\mathcal{O}_k[[X]]$ mit $f(\alpha_i) = 0$ für alle i. Dann gibt es eine Potenzreihe $g(X) \in \mathcal{O}_k[[X]]$ mit $f(X) = h(X)g(X)$.
Beweis: Die Erweiterung $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|k$ ist endlich galoissch innerhalb $\overline{k}$. Nach Bemerkung 5.21 findet man ein $g(X) \in \mathcal{O}_{k(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}[[X]]$ mit $f(X) = h(X)g(X)$. Das Polynom h und die Potenzreihe f haben Koeffizienten in $\mathcal{O}_k$. Für jedes $\sigma \in G(k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|k)$ ist also $f = hg = h^\sigma g$. Also ist $h(g - g^\sigma) \equiv 0$, demnach $g = {}^\sigma g$, und es folgt $g(X) \in \mathcal{O}_k[[X]]$.□

5.23 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 5.5): Sei $\pi \in K$, $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$ und $g(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $g(W_l^1) = 0$. Dann gibt es ein $h(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $g(X) = [\pi]_l h(X)$ (Multiplikation von Potenzreihen).
Beweis: Sei zunächst $l'(X) = \pi X + X^q$, dann ist $l'(X) = [\pi]_{l'}$, und $W_{l'}^1$ besteht aus den Nullstellen des separablen Polynoms $l' \in \mathcal{O}_K[X]$ in $\overline{k}$. Nach Hilfssatz 5.22 gilt in diesem Fall bereits die Behauptung. Sei nun $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$ beliebig. Sei $\theta(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ der Isomorphismus der formalen Gruppen F_l und $F_{l'}$ aus Folgerung 3.55. Sei $g(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $g(W_l^1) = 0$. Es gilt $W_l^1 = \theta(W_{l'}^1)$, also $g \circ \theta(W_{l'}^1) = 0$, wobei $g \circ \theta \in \mathcal{O}_K[[X]]$. Für l' bekommt man bereits eine Potenzreihe $h(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ so, dass $g \circ \theta = [\pi]_{l'} h$, also $g = ([\pi]_{l'} \circ \theta^{-1})(h \circ \theta^{-1})$, wobei h und $h \circ \theta^{-1} \in \mathcal{O}_K[[X]]$. Den Eigenschaften von θ entnimmt man $\theta \circ [\pi]_{l'} = [\pi]_l \circ \theta$, also $g = (\theta^{-1} \circ [\pi]_l)(h \circ \theta^{-1})$. Da man aus θ^{-1} innerhalb $\mathcal{O}_K[[X]]$ das X ausklammern kann, kann man aus $(\theta^{-1} \circ [\pi]_l)$ innerhalb $\mathcal{O}_K[[X]]$ das $[\pi]_l$ ausklammern. □

5.24 Folgerung: Im K_0-Fall hat mit g auch die Potenzreihe h des Hilfssatzes 5.23 Koeffizienten in $\mathcal{O}_{K_0}$.
Beweis: Hilfssatz 5.22 ergibt zunächst für $l'(X) = \pi X + X^q \in \mathfrak{F}(K_0, \pi, q)$ die Behauptung mit einem $h(X) \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$. Für beliebiges $l \in \mathfrak{F}(K_0, \pi, q)$ ist nach Folgerung 3.56 der Isomorphismus $\theta(X) \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$, damit auch $\theta(X)^{-1}$. Man setzt $g(X) \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ mit $g(W_l^1) = 0$ an und erhält wie in Hilfssatz 5.23, dass man aus $g = (\theta^{-1} \circ [\pi]_l)(h \circ \theta^{-1})$ das $[\pi]_l$ ausklammern kann, wobei nun alle Potenzreihen Koeffizienten bereits in K_0 haben. □

5.25 Bemerkung ([Iwa86]): Für $g(W_l^n) = 0$ folgt analog $g = [\pi^n]_l h$ mit einem $h \in \mathcal{O}_K[[X]]$ im allgemeinen bzw. $h \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ im K_0-Fall.

5.26 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 5.6): Sei $\pi \in K$, $l \in \mathfrak{F}(K,\pi,q)$ und $g(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ eine Potenzreihe mit $g(X +_l w) = g(X)$ für alle $w \in W_l^1$. Dann gibt es eine Potenzreihe $h(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $g = h \circ [\pi]_l$.

Beweis: Sei $a_0 := g(0) \in \mathcal{O}_K$ und $h_1 := g - a_0$. Dann ist $h_1(w) = g(w) - g(0) = 0$ für alle $w \in W_h^1$ und aus Hilfssatz 5.23 folgt, dass h_1 innerhalb $\mathcal{O}_K[[X]]$ durch $[\pi]_l$ teilbar ist: $h_1 = g_1[\pi]_l$ mit $g_1 \in \mathcal{O}_K[[X]]$, also $g = a_0 + h_1 = a_0 + g_1[\pi]_l$. Für $[\pi]_l$ gilt nun $[\pi]_l(X +_l w) = [\pi]_l(X) +_l [\pi]_l(w) = [\pi]_l(X)$, also $g_1(X +_l w) = g_1(X)$ für alle $w \in W_l^1$. Nun kann man mit g_1 dasselbe durchführen, und erhält $g_1 = a_1 + [\pi]_l g_2$, mit $a_1 := g_1(0) \in \mathcal{O}_K$ und $g_2 \in \mathcal{O}[[X]]$, und somit $g = a_0 + a_1[\pi]_l + [\pi]_l^2 g_2$ usw., letztlich Folgen (a_i), $a_i \in \mathcal{O}_K$, und (g_i), $g_i \in \mathcal{O}_K[[X]]$, so, dass $g = a_0 + a_1[\pi]_l + \ldots + a_{n-1}[\pi]_l^{n-1} + [\pi]_l^n g_n$ für alle $n \geq 0$. Also erfüllt $h(X) := a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots \in \mathcal{O}_K[[X]]$ die Gleichung $g = h \circ [\pi]_l$. □

5.27 Folgerung: Im K_0-Fall hat mit g auch die Potenzreihe h des Hilfssatzes 5.26 Koeffizienten in $\mathcal{O}_{K_0}$.

Beweis: Nun ist $a_0 := g(0) \in \mathcal{O}_{K_0}$, also $h_1 := g - a_0 \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$. Aus Folgerung 5.24 folgt, dass $h_1 = g_1 \cdot [\pi]_l$ mit einer Potenzreihe $g_1 \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$. Der nächste Schritt ist $g_1 = a_1 + [\pi]_l g_2$, mit $a_1 := g_1(0) \in \mathcal{O}_{K_0}$ und $g_2 \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ wieder nach Folgerung 5.24 usw. Deshalb gilt für die Folge (a_i), dass alle $a_i \in \mathcal{O}_{K_0}$ und für (g_i), dass alle $g_i \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$. Damit ist $h(X) := a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$. □

5.28 Folgerung: Wenn $g(X +_l w) = g(X)$ für alle $w \in W_l^n$, dann folgt $g = h \circ [\pi^n]_l$ mit einem $h \in \mathcal{O}_K[[X]]$ im allgemeinen bzw. einem $h \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ im K_0-Fall.

5.29 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 5.7): Seien $g, h \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $g = h \circ [\pi]_l$. Dann gilt $g \equiv 0 \bmod \mathcal{P}_K^n \Leftrightarrow h \equiv 0 \bmod \mathcal{P}_K^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, damit $g = 0 \Leftrightarrow h = 0$.

5.30 Folgerung: Offensichtlich folgt daraus die entsprechende Aussage im K_0-Fall.

5.31 Folgerung: Hilfssatz 5.29 bzw. Folgerung 5.30 bewirken, dass die Potenzreihe h des Hilfssatzes 5.26 bzw. der Folgerung 5.27 eindeutig bestimmt ist.

5.32 Folgerung: Nach Bemerkung 5.19 hat das Produkt $\mathcal{L}_l(g)(X) := \prod_{w \in W_l^1} g(X +_l w)$ Koeffizienten in K. Weil $(X +_l w_1) +_l w_2 = X +_l (w_1 +_l w_2)$ für w_1, w_2, also auch $w_1 +_l w_2 \in W_l^1$ gilt, ist nach Konstruktion die Bedingung $\mathcal{L}_l(g)(X +_l w) = \mathcal{L}_l(g)(X)$ für alle $w \in W_l^1$ erfüllt. Deshalb hat man nach Hilfssatz 5.26 und Hilfssatz 5.29 eine einzige Potenzreihe $h \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $\mathcal{L}_l(g) = h \circ [\pi]_l$. Damit hat man die Colemannorm $\mathcal{N}_l(g) := h$ aus Definition 5.17 im K-Fall.

5.33 Satz: Sei im K_0-Fall $g \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$. Dann hat auch $\mathcal{N}_l(g)$ Koeffizienten in K_0.

Beweis: Im K_0-Fall hat nach Bemerkung 5.19 das Produkt $\mathcal{L}_l(g)(X) := \prod_{w \in W_l^1} g(X +_l w)$ bereits Koeffizienten in K_0. Nach Folgerung 5.27 und Folgerung 5.30 gibt es eine einzige Potenzreihe $h \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ mit $\mathcal{L}_l(g) = h \circ [\pi]_l$. Damit hat die Colemannorm $\mathcal{N}_l(g) := h$ Koeffizienten in $\mathcal{O}_{K_0}$. □

5.34 Folgerung: Im K_0-Fall bildet der Projektor P aus Hilfssatz 3.85 die Menge $\mathfrak{F}^0(K_0,\pi,q)$ nach $\mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K_0,\pi,q) \subseteq \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K,\pi,q)$ ab. Die Menge $\mathfrak{F}^0(K_0,\pi,q)$ ist nichtleer, denn solche Potenzreihen erhält man nach Bemerkung 3.84 in der Form $f = eh$ mit einem Eisensteinpolynom $e = \pi X + \cdots + (-1)^{q-1}X^q \in K_0[X]$ und einer Potenzreihe $H \in 1 + X\mathcal{P}_{K_0}[[X]]$.

5.35 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 5.8): (i) $\mathcal{N}_l(g_1g_2) = \mathcal{N}_l(g_1)\mathcal{N}_l(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_K[[X]]$.

(ii) $\mathcal{N}_l(g) \equiv g \bmod \mathcal{P}_K$ für alle $g \in \mathcal{O}_K[[X]]$.

(iii) Wenn $g \in X^i\mathcal{O}_K[[X]]^\times$ für ein $i \geq 0$, dann $\mathcal{N}_l(g) \in X^i\mathcal{O}_K[[X]]^\times$.

(iv) Wenn $g \equiv 1 \bmod \mathcal{P}_K^i$ für alle $i \geq 1$, dann $\mathcal{N}_l(g) \equiv 1 \bmod \mathcal{P}_K^{i+1}$.

5.36 Folgerung: Im K_0-Fall gilt (i) erst recht. Nach Satz 5.33 ist $\mathcal{N}_l(g) \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$, also gelten (ii) und (iv) auch mit $\mathcal{P}_{K_0}$, und wenn bei (iii) $g \in X^i\mathcal{O}_{K_0}[[X]]^\times$ für ein $i \geq 0$ ist, folgt $\mathcal{N}_l(g) \in X^i\mathcal{O}_K[[X]]^\times \cap \mathcal{O}_{K_0}[[X]] = X^i\mathcal{O}_{K_0}[[X]]^\times$.

5.37 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 5.9): (i) $\mathcal{N}_l^n(g) \circ [\pi^n]_l = \prod_{w \in W_l^n} g(X +_l w)$ für alle $n \geq 0$.

(ii) Wenn $g \in X^i\mathcal{O}_K[[X]]^\times$ für ein $i \geq 0$, dann ist $\mathcal{N}_l^{n+1}(g)/\mathcal{N}_l^n(g) \in \mathcal{O}_K[[X]]^\times$ und $\mathcal{N}_l^{n+1}(g) \equiv \mathcal{N}_l^n(g) \bmod \mathcal{P}_K^{n+1}$.

5.38 Folgerung: Im K_0-Fall gilt (i) erst recht. Wenn $h \in X^i\mathcal{O}_{K_0}[[X]]^\times$ für ein $i \geq 0$, ist nach Hilfssatz 5.37(ii) $\mathcal{N}_l^{n+1}(h) \equiv \mathcal{N}_l^n(h) \bmod \mathcal{P}_K^{n+1}$, das heißt, $\mathcal{N}_l^{n+1}(h) - \mathcal{N}_l^n(h) \in \mathcal{P}_K^{n+1}[[X]]$, und da $\mathcal{N}_l^{n+1}(h)$ und $\mathcal{N}_l^n(h)$ nach Satz 5.33 beide in $\mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ sind, liegt die Differenz in $\mathcal{P}_K^{n+1}[[X]] \cap \mathcal{O}_{K_0}[[X]] = \mathcal{P}_{K_0}^{n+1}[[X]]$.

5.39 Definition ([Col79]): Wegen Hilfssatz 5.37(ii) und Folgerung 5.38 hat man den wohldefinierten Operator

$$\mathcal{N}_l^\infty(g) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_l^n(g).$$

5.40 Folgerung: Nach Definition gilt $\mathcal{N}_l(\mathcal{N}_l^\infty(g)) = \mathcal{N}_l^\infty(g)$, erst recht $\mathcal{N}_l^\infty(\mathcal{N}_l^\infty(g)) = \mathcal{N}_l^\infty(g)$ das heißt,

$$\mathcal{N}_l^\infty : \mathcal{O}_K[[X]] \to \mathcal{C}(K, l)$$

ist ein Projektor, ferner gilt $\mathcal{N}_l^\infty(g) \equiv g \bmod \mathcal{P}_K$ wegen 5.35(ii). Im K_0-Fall hat der Grenzwert Koeffizienten im vollständigen Teilring $\mathcal{O}_{K_0}$, das heißt, $\mathcal{N}_l^\infty(g) : \mathcal{O}_{K_0}[[X]] \to \mathcal{C}(K_0, l)$ ist Projektor, ferner $\mathcal{N}_l^\infty(g) \equiv g \bmod \mathcal{P}_{K_0}$ wegen 5.36(ii).

5.41 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 5.10): Sei $\pi \in K$ Primelement und $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q^f)$. Sei $\alpha \in \tilde{W}_l^n$ ein fester primitiver Teilungspunkt, dann gehören dazu die primitiven Teilungspunkte $\alpha_i := [\pi^{n-i}]_l(\alpha) \in \tilde{W}_l^i$ für $i = 1, \ldots, n$. Schließlich seien $\beta_i \in \pi^{n-i}\mathcal{P}_{K_1}\mathcal{O}_{K_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Dann gibt es eine Potenzreihe $h \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $\beta_i = h(\alpha_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Beweis: Für $i = 1, \ldots, n$ sei

$$g_i(X) := \frac{[\pi^n]_l \cdot [\pi^{i-1}]_l}{[\pi^i]_l}.$$

Es gilt $[\pi^n]_l = [\pi^{n-i}]_l \circ [\pi^i]_l = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots)([\pi^i]_l)$ mit $a_i \in \mathcal{O}_K$. Wegen $[\pi]_l \equiv \pi X \bmod \deg 2$, also $[\pi^{n-i}]_l \equiv \pi^{n-i} X \bmod \deg 2$, das heißt, $a_0 = 0$ und $a_1 = \pi^{n-i}$ ist $[\pi^n]_l = \pi^{n-i}[\pi^i]_l +$ Terme mit höheren (Exponent ≥ 2) Potenzen von $[\pi^i]_l$.

Wenn man durch $[\pi^i]_l$ teilt und mit $[\pi^{i-1}]_l$ multipliziert, ergibt sich also $g_i(X) = (\pi^{n-i} + a_2[\pi^i]_l + a_3[\pi^i]_l^2 + \cdots)[\pi^{i-1}]_l \in \mathcal{O}_K[[X]]$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach dieser Gleichung gilt $g_i(\alpha_i) = \pi^{n-i}\alpha_1$ für $i = 1, \ldots, n$, weil dann nach Voraussetzung $[\pi^{i-1}]_l(\alpha_i) = \alpha_1$ sowie $[\pi^i]_l(\alpha_i) = 0$. Ferner gilt $g_i(\alpha_j) = 0$ für $j \neq i$, $i = 1, \ldots, n$, wegen $[\pi^{i-1}]_l(a_j) = 0$ falls $j < i$. Nach Definition ist $g_i(\alpha_j) = 0$ wegen $[\pi^i]_l(a_j) = \alpha_{j-i} \neq 0$ und $[\pi^n]_l(a_j) = 0$ falls $j > i$.

Für $i = 1, \ldots, n$ sind die $\beta_i \in \pi^{n-i}\mathcal{P}_{K_1}\mathcal{O}_{K_i} = \pi^{n-i}\alpha_1\mathcal{O}_K[\alpha_i]$ von der Form

$$\beta_i = \pi^{n-i}\alpha_1 h_i(\alpha_i)$$

mit Polynomen $h_i(X) \in \mathcal{O}_K[X]$. Damit erfüllt die Potenzreihe $h := \sum_{i=0}^n g_i h_i \in \mathcal{O}_K[[X]]$ die Eigenschaft $h(\alpha_i) = \beta_i$ für $i = 1, \ldots, n$. □

5.42 Folgerung: Wenn im K_0-Fall die β_i bereits in $\pi^{n-i}\mathcal{P}_{K_{0,1}}\mathcal{O}_{K_{0,i}}$ für $i = 1, \ldots, n$ liegen, wobei $\mathcal{O}_{K_{0,i}} := \mathcal{O}_{K_0(W_l^i)}$ und $\mathcal{P}_{K_{0,i}}$ dessen maximales Ideal seien, dann hat die Potenzreihe des Hilfssatzes 5.41 bereits Koeffizienten in $\mathcal{O}_{K_0}$.

Beweis: Im K_0-Fall hat nach Hilfssatz 3.53 $[\pi^j]_l$ für alle $j \geq 0$ Koeffizienten in K_0. Wegen $[\pi^n]_l = [\pi^{n-i}]_l \circ [\pi^i]_l = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots)([\pi^i]_l)$ liegen alle $a_i \in \mathcal{O}_{K_0}$, also $g_i(X) = (\pi^{n-i} + a_2[\pi^i]_l + a_3[\pi^i]_l^2 + \cdots)[\pi^{i-1}]_l \in \mathcal{O}_{K_0}$. Die $\beta_i = \pi^{n-i}\alpha_1 h_i(\alpha_i) \in \pi^{n-i}\alpha_1\mathcal{O}_{K_0}[\alpha_i]$, und die Polynome haben Koeffizienten in K_0, also auch die Potenzreihe $h := \sum_{i=0}^n g_i h_i$. □

5.43 Bemerkung: Die Körper $K_{0,i}$ sind nicht eindeutig, sondern bilden nach 5.3 verschiedene Türme. Um einen bestimmten Turm zu treffen, wählt man einen damit verträglichen Erzeuger: Soll $K_{0,i} \subset \mathcal{F}$ sein, muss $\alpha_i \in \mathcal{F}$ sein.

5.44 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 5.11): Sei $\pi \in K$ Primelement, $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q^f)$, α und α_i wie in 5.41. Ferner betrachte zu einem $\alpha \in \tilde{W}_l^n$ für $i = 1, \ldots, n$ die Elemente $\alpha_i := [\pi^{n-i}]_l(\alpha)$ und zu einer Einheit ξ aus $U(K_n)$ die Elemente $\xi_i := N_{K_n|K_i}(\xi)$. Dann existiert eine Potenzreihe $h(X) \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ so, dass $\xi_i = h(\alpha_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beweis: Wegen der Reinverzweigtheit von $K_n|K_i$ ist α_i Primelement in K_i. Da $\mathcal{O}_{K_n} = \mathcal{O}_K(\alpha)$, ist $\xi \in U(K_n) \subset \mathcal{O}_{K_n}$ von der Form $\xi = h_1(\alpha)$, wobei $h_1(X) \in \mathcal{O}_K[X]$ ein Polynom mit $h_1(0) \not\equiv 0 \bmod \mathcal{P}_K$, das heißt, $h_1 \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]^\times$, da ξ eine Einheit ist.

Der Colemansche Normoperator $\mathcal{N}_l$ erfüllt nach 5.37(i) für alle $i = 1, \ldots, n$

$$\mathcal{N}_l^{n-i}(h_1) \circ [\pi^{n-i}]_l = \prod_\gamma h_1(X +_l \gamma),$$

wobei γ die Menge W^{n-i} durchläuft. Einsetzen von $X = \alpha$ ergibt $\mathcal{N}_l^{n-i}(h_1)(\alpha_i) = \prod_\gamma h_1(\alpha +_l \gamma)$. Die Elemente $\alpha +_l \gamma$ durchlaufen für $\gamma \in W^{n-i}$ die Menge der Konjugierten von α über dem Körper K_i, also die Werte $\sigma(\alpha)$ für $\sigma \in \mathrm{Iso}_K(K_i, \bar{K})$. Damit ist das Produkt gleich $N_{K_n|K_i}(h_1(\alpha)) = N_{K_n|K_i}(\xi) = \xi_i$.

Die Potenzreihe $h_2 := \mathcal{N}_l^n(h_1) \in \mathcal{O}_K[[X]]^\times$ (nach Hilfssatz 5.35(iii)) erfüllt nach Hilfssatz 5.37(ii) für alle $n \geq 1$

$$\mathcal{N}_l^{n+1}(h) \equiv \mathcal{N}_l^n(h) \bmod \mathcal{P}_{K_{n+1}}.$$

Damit hat man:

$$\mathcal{N}_l^{n-i+1}(h_1) \equiv \mathcal{N}_l^{n-i}(h_1) \bmod \mathcal{P}_{K_{n-i+1}},$$
$$\ldots,$$
$$\mathcal{N}_l^{n+1}(h_1) \equiv \mathcal{N}_l^{n}(h_1) \bmod \mathcal{P}_{K_{n+1}}.$$

Weil $\mathcal{P}_{K_{n-i+1}}$ das kleinste Ideal ist, gilt insgesamt $\mathcal{N}_l^{n-i}(h_1) \equiv \mathcal{N}_l^{n-i+1}(h_1) \equiv \ldots \equiv \mathcal{N}_l^{n}(h_1) = h_2 \bmod \mathcal{P}_{K_{n-i+1}}$.
Einsetzen von $X = \alpha_i$ ergibt $\xi_i = \mathcal{N}_l^{n-i}(h_1)(\alpha_i) \equiv h_2(\alpha_i) \bmod \mathcal{P}_{K_{n-i+1}} = \pi^{n-i+1}\mathcal{O}_K$. Mit $\beta_i := \xi_i - h_2(\alpha_i)$, das sind Elemente aus $\pi^{n-i+1}\mathcal{O}_K \subset \pi^{n-i+1}\mathcal{O}_{K_i} \subset \pi^{n-i}(\pi\mathcal{O}_{K_1})\mathcal{O}_{K_i} = \pi^{n-i}\mathcal{P}_{K_1}\mathcal{O}_{K_i}$.
Nach Hilfssatz 5.41 gibt es dann eine Potenzreihe $h_3 \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $\beta_i = h_3(\alpha_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Damit erfüllt die Potenzreihe $h := h_2 + h_3 \in \mathcal{O}_K$ die behauptete Eigenschaft $\xi_i = h(\alpha_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. □

5.45 Folgerung: Im K_0-Fall mit einem Element ξ aus $U(K_{0,n})$ und Elemente $\xi_i := N_{K_{0,n}|K_{0,i}}(\xi)$ hat die Potenzreihe $h(X)$ des Hilfssatzes 5.44 bereits Koeffizienten in $\mathcal{O}_{K_0}$.
Beweis: Auch die Erweiterung $K_{0,n}|K_{0,1}$ ist reinverzweigt, also ist α Primelement in allen $K_{0,i}$ und $\mathcal{O}_{K_{0,n}} = \mathcal{O}_{K_0}(\alpha)$. Also ist $\xi \in U(K_{0,n}) \subset \mathcal{O}_{K_{0,n}}$ von der Form $\xi = h_1(\alpha)$ mit einem Polynom $h_1(X) \in \mathcal{O}_{K_0}[X]^\times$.
Nun haben in $\mathcal{N}_l^{n-i}(h_1) \circ [\pi^{n-i}]_l = \prod_\gamma h_1(X +_l \gamma)$ alle Potenzreihen Koeffizienten in K_0 nach Satz 5.33 und 3.53 Koeffizienten in K_0.
Die Elemente $\alpha +_l \gamma$ durchlaufen für $\gamma \in W^{n-i}$ die Werte $\sigma(\alpha)$ für $\sigma \in \mathrm{Iso}_K(K_\pi^i, \bar{K})$. Die Einschränkung auf $(K_0)_\pi^i$ ist ein Isomorphismus auf die Menge $\mathrm{Iso}_{K_0}((K_0)_\pi^i, \bar{K})$, somit durchläuft $\sigma(\alpha)$ die Menge der Konjugierten von α über $(K_0)_\pi^i$. Da h_1 Koeffizienten in K_0 hat, gilt $\sigma(h_1(\alpha)) = h_1(\sigma(\alpha)) = h_1(\alpha +_l \gamma)$, und diese Elemente sind die Konjugierten von $h_1(\alpha)$ über $(K_0)_\pi^i$. Damit ist das Produkt gleich $N_{K_{0,n}|K_{0,i}}(h_1(\alpha)) = N_{K_{0,n}|K_{0,i}}(\xi) = \xi_i$.
Mit $h_1 \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]^\times$ ist $h_2 := \mathcal{N}_l^n(h_1) \in \mathcal{O}_K[[X]]^\times \cap \mathcal{O}_{K_0}[[X]] = \mathcal{O}_{K_0}[[X]]^\times$. Man hat $\mathcal{N}_l^{n-i}(h_1) \equiv \mathcal{N}_l^{n-i+1}(h_1) \equiv \ldots \equiv \mathcal{N}_l^{n}(h_1) = h_2 \bmod \mathcal{P}_{K_{0,n-i+1}}$ und erhält $\xi_i = \mathcal{N}_l^{n-i}(h_1)(\alpha_i) \equiv h_2(\alpha_i) \bmod \mathcal{P}_{K_0}^{n-i+1} = \pi^{n-i+1}\mathcal{O}_{K_0}$.
Nun sind die $\beta_i := \xi_i - h_2(\alpha_i) \in \pi^{n-i+1}\mathcal{O}_{K_0} \subset \pi^{n-i+1}\mathcal{O}_{K_{0,i}} \subset \pi^{n-i}(\pi\mathcal{O}_{K_{0,1}})\mathcal{O}_{K_{0,i}} = \pi^{n-i}\mathcal{P}_{K_{0,1}}\mathcal{O}_{K_{0,i}}$.
Nach der Folgerung 5.42 gibt es dann eine Potenzreihe $h_3 \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ mit $\beta_i = h_3(\alpha_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$, damit $h := h_2 + h_3 \in \mathcal{O}_{K_0}$. □

5.46 Bemerkung: Zu einem $\pi \in K$ Primelement und einem $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$ werden in [Iwa86] Kapitel 8 π-Folgen $(l, w = (w_n)_n)$ definiert, wobei $w_n \in \tilde{W}_l^n$ und $w_n = l(w_{n+1})$. Damit entspricht eine solche π-Folge (l, w) genau einem Erzeuger des Tatemoduls T_l, dem projektiven Limes T_l der $\mathcal{O}_K$-Moduln W_l^n bezüglich der Übergangsabbildungen $l : W_l^n \to W_l^{n-1}$. Ein Erzeuger des Tatemoduls ist ein Element des projektiven Limes, bei dem jedes Folgenglied w_n ein Erzeuger des $\mathcal{O}_K$-Moduls W_l^n, das heißt primitiver Teilungspunkt, ist. Mit einer solchen Folge $w = (w_n)_n$ kann man Potenzreihen auf Gleichheit überprüfen (Eindeutigkeitsprinzip):

5.47 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 8.1): (i) Ist für $g \in \mathcal{O}_K[[X]]$ und $i = 1, \ldots, n$ immer $g(w_i) = 0$, dann gibt es ein $h(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ so, dass $g(X) = [\pi^n]_l \cdot h(X)$ (Multiplikation von Potenzreihen).

(ii) Ist $g(w_i) = 0$ für alle $i \geq 0$, dann ist $g(X) = 0$.
Beweis: (i) Da g Koeffizienten in K hat, ist mit $g(w_i) = 0$ auch $g(\alpha_i) = 0$ für alle $\alpha_i \in \tilde{W}_l^i$, da das die Konjugierten von w_i über K sind. Damit ist $g(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in W_l^n$, also g innerhalb $\mathcal{O}_K[[X]]$ durch $[\pi^n]_l$ teilbar nach Bemerkung 5.25.
(ii) Da $[\pi]_l = l$ zum maximalen Ideal $(\pi, X) = \{\sum_{i\geq 0} a_i X^i \mid a_0 = 0, \pi | a_1\}$ gehört, muss ein g nach (i) zu $(\pi, X)^n$ gehören. Damit muss ein g wie in (ii) ein Element von $\bigcap_{n\geq 1}(\pi, X)^n = \{0\}$ sein. $\square$

5.48 Folgerung: Im K_0-Fall gilt (i) ebenso nach Folgerung 5.27, und (ii) ist ein Spezialfall von 5.47(ii).

5.49 Hilfssatz ([Iwa86] Lemma 8.3): Eine Lubin-Tate-Potenzreihe $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$ ist normisch (Definition 3.59 genau dann, wenn $X \in \mathcal{C}(K, l)$, das heißt,

$$l(X) = [\pi]_l(X) \stackrel{!}{=} \mathcal{L}_l(X)(X) = \prod_{w \in W_l^1} (X +_l w).$$

5.50 Satz ([Col79] Theorem 16, [Iwa86] Theorem 8.4): Sei $\pi \in K$ Primelement, $l \in \mathfrak{F}(K, \pi, q)$ und $w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T_l$.

(i) Ist $\beta \in \varprojlim K_n^\times \cong \mathbb{X}_K(K_\pi)^\times$ mit $\nu(\beta) = 0$, dann gibt es eine einzige Potenzreihe $t(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ so, dass $t(w_n) = \beta_n$ für alle $n \geq 0$.

(ii) Ist $l \in \mathfrak{F}^{\text{norm}}(K, \pi, q)$ und $e := \nu(\beta)$ beliebig, gibt es eine einzige Potenzreihe $t(X) \in X^e \mathcal{O}_K[[X]]$ mit derselben Eigenschaft.

Beweis: Wegen $\nu(\beta) = \nu(N_{K_n|K}(\beta_n) = 0$ ist $\beta_n \in U(K_n)$, und nach Hilfssatz 5.44 gibt es eine Potenzreihe $t_n \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $t_n(w_i) = \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $t_{n+1}(w_i) - t_n(w_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also $t_{n-1} \equiv t_n \bmod [\pi^n]_l$. Da die Differenz $t_{n-1} - t_n$ insbesondere in $(\pi, X)^n$ liegt, gibt es einen Grenzwert

$$t := \lim_{n\to\infty} t_n$$

in dem Sinne, dass alle Koeffizientenfolgen in $\mathcal{O}_K$ konvergieren, also $t(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$. Der Grenzwert t erfüllt

$$t \equiv t_n \bmod [\pi^n]_l,$$

das heißt, $t(X) = t_n(X) + g(X)[\pi^n]_l$ mit einem $g \in \mathcal{O}_K[[X]]$, folglich

$$t(w_n) = t_n(w_n) + g(w_n)[\pi^n]_l(w_n) = t_n(w_n) + 0 = \beta_n \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Da $t(w_1) = \beta_1 \in U(K_1)$, das heißt, $t - \beta_1 = [\pi]_l h$ mit einem $h \in \mathcal{O}_K[[X]]$, gilt $t \in \mathcal{O}_K[[X]]^\times$. Das t ist eindeutig, da mit einem weiteres t' für die Differenz $(t - t')(w_n) = 0$ für alle $n \geq 1$, also nach Hilfssatz 5.47 $t - t' = 0$ ist.
(ii) Wenn l normisch ist, entspricht w einem Primelement in $\mathbb{X}_K(K_\pi)$, das heißt, $\nu(W) = 1$. Sei $e := \nu(\beta) = \nu_K(N_{K_n|K}(\beta_n)$ und $\beta' := (w_n^{-e}\beta_n)_{n\geq 1} \in \varprojlim K_n^\times$. Dann ist $\nu(\beta') = 0$, und es gibt eine einzige Potenzreihe $t'(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]^\times$ mit $t'(w_n) = w_n^{-e}\beta_n$ nach (i), damit ist die Potenzreihe $t(X) := X^e t'(X)$ die einzige mit

$$t(w_n) = w^e w^{-e} \beta_n = \beta_n$$

für alle $n \geq 0$. $\square$

5.51 Satz: Im K_0-Fall sei ein $w = (w_i)_{i\in\mathbb{N}} \in T_l$ gewählt.

(i) Ist $\beta \in \varprojlim K_{0,n}^\times \cong \mathbb{X}_{K_0}(K_{0,\infty})^\times$, $K_{0,\infty} := \bigcup_n K_{0,n}$, mit $\nu(\beta) = 0$, dann gibt es eine einzige Potenzreihe $t(X) \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ so, dass $t(w_n) = \beta_n$ für alle $n \geq 0$.

(ii) Ist $l \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K_0, \pi, q)$ und $e := \nu(\beta)$ beliebig, gibt es eine einzige Potenzreihe $t(X) \in X^e\mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ mit derselben Eigenschaft.

Beweis: Nun gilt $\beta_n \in U(K_{0,n})$, und nach Folgerung 5.45 hat man eine Potenzreihe $t_n \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ mit $t_n(w_i) = \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Beim Grenzwert $t := \lim_{n\to\infty} t_n$ konvergieren die Koeffizientenfolgen im vollständigen Teilring $\mathcal{O}_{K_0}$, also $t(X) \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$. Ferner gilt $t(X) = t_n(X) + g(X)[\pi^n]_l$ mit einem $g \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ nach Bemerkung 5.25, und wieder gilt $t(w_n) = \beta_n$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da $t(w_1) = \beta_1 \in U(K_{0,1})$, ist $t \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]^\times$. Die Eindeutigkeit folgt wieder aus Hilfssatz 5.47.
(ii) Wenn l normisch ist, entspricht w einem Primelement in $\mathbb{X}_{K_0}(K_{0,\infty})$.
Das $\beta' := (w_n^{-e}\beta_n)_{n\geq 1}$ ist nun in $\varprojlim K_{0,n}^\times$. Nach (i) gibt eine einzige Potenzreihe $t'(X) \in \mathcal{O}_{K_0}[[X]]^\times$ mit $t'(w_n) = w_n^{-e}\beta_n$, damit hat auch $t(X) := X^e t'(X)$ Koeffizienten in K_0. $\square$

5.52 Definition: Die Abbildungen $\varprojlim_n K_n^\times \to \mathcal{O}_K[[X]]$ aus Hilfssatz 5.50 und $\varprojlim_n K_{0,n}^\times \to \mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ aus Satz 5.51 seien mit $\mathcal{C}_{l,w}$ bezeichnet, das heißt,

$$\mathcal{C}_{l,w}(\beta) := t.$$

5.53 Hilfssatz ([Col79]): Für $\beta \in \varprojlim_n K_n^\times$ ist $t = \mathcal{C}_{l,w}(\beta) \in \mathcal{C}(K, l)$.

Beweis: Für beliebiges $n \geq 1$ ist $\mathcal{N}_l(t)(w_n) = (\mathcal{N}_l(t) \circ [\pi]_l)(w_{n+1}) = \prod_{w\in W_l^1} t(w_n +_l w) = \prod_{\sigma\in G(K_{n+1}|K_n)} t(\sigma(w_{n+1})) = \prod_{\sigma\in G(K_{n+1}|K_n)} \sigma(\sigma^{-1}t\sigma)(w_{n+1})) = \prod_{\sigma\in G(K_{n+1}|K_n)} \sigma(t(w_{n+1})) = N_{K_{n+1}|K_n}(t(w_{n+1})) = N_{K_{n+1}|K_n}(\beta_{n+1}) = \beta_n$. Die Potenzreihe $\mathcal{N}_l(t)$ erfüllt also die Eigenschaften der eindeutig bestimmten Potenzreihe t, damit gilt $\mathcal{N}_l(t) = t$. $\square$

5.54 Bemerkung: Sämtliche Konstruktionen der Theorie beruhten auf der Addition, der Multiplikation und dem Einsetzen von Potenzreihen, ferner der erwähnten Grenzwertbildung. Das Argument war immer, dass diese Operationen nicht aus dem vollständigen Teilring $\mathcal{O}_{K_0} \subseteq \mathcal{O}_K$ als Koeffizientenbereich herausführen. Genauso kann man argumentieren, dass alle diese Operationen verträglich mit der Operation der Galoisgruppe $G(K|K_0)$ sind. Dann erhält man aus dem K-Fall durch Betrachtung der $G(K|K_0)$-Invarianten den K_0-Fall.

5.55 Definition ([Col79] Theorem 11): Für $g(X) \in \mathcal{O}_K((X))$ sei n so groß, dass $[\pi]_l^n g(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$. Dann ist

$$\mathcal{N}_l(g) := X^{-qn}\mathcal{N}_l([\pi]_l^n g)$$

die eindeutige Fortsetzung von $\mathcal{N}_l$ auf $\mathcal{O}_K((X))$. Damit ist die $\mathcal{N}_l$ ist eine stetige, multiplikative Selbstabbildung des Monoids der Laurentreihen $\mathcal{O}_K((X))$, die die Teilmenge $\mathcal{O}_K[[X]]$ der Potenzreihen in sich überführt.

5.3 Der durch Colemanpotenzreihen vermittelte Isomorphismus

In diesem Abschnitt wird noch ein Blick auf den Nutzen der Colemantheorie für die explizitere Beschreibung des Isomorphismus zwischen dem Normenkörper und Laurentreihenkörper gegeben. Obwohl in dieser Arbeit nicht mehr benutzt, könnte es doch im Kontext eines Basispunktansatzes wie in Abschnitt 4.5 skizziert, anwendbar sein.

5.56 Bemerkung ([Col79] Abschnitt IV im Fall $H = K$; Motivation): Der Colemansche Normoperator bildet die Menge $\mathcal{M} := \mathcal{O}_K((X))^\times$ der Einheiten (erster von Null verschiedener Koeffizient in $U(K)$) auf sich ab. Auch die Menge $\mathcal{M}^0$ der Einseinheiten von $\mathcal{M} = \mathcal{O}_K((X))^\times$ innerhalb $\mathcal{O}_K[[X]]$, das sind Potenzreihen mit $g(0) \equiv 1 \bmod \pi\mathcal{O}_K$, das heißt mit einer Einseinheit als Absolutkoeffizient, also $\mathcal{M}^0 = 1 + \pi\mathcal{O}_K + X\mathcal{O}_K[[X]]$ wird in sich überführt. Sei $\mathcal{M}_\infty := \mathcal{C}(K, l) \subset \mathcal{O}_K((X))^\times$, ferner $\mathcal{M}^0_\infty := \mathcal{M}_\infty \cap \mathcal{M}^0 \subset \mathcal{O}_K((X))^\times$.

Man hat den Projektor $\mathcal{N}^\infty := \mathcal{N}_l^\infty$ von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}_\infty$. Aus der Projektoreigenschaft folgt

$$\mathcal{M} = \ker(\mathcal{N}^\infty) \times \mathrm{Bild}(\mathcal{N}^\infty).$$

Für die Einschränkung des Projektors $\mathcal{N}^\infty$ auf $\mathcal{M}^0$, folgt $\ker(\mathcal{N}^\infty|_{\mathcal{M}^0}) = 1 + \pi\mathcal{O}_K[[X]]$ und $\mathrm{Bild}(\mathcal{N}^\infty|_{\mathcal{M}^0}) = \mathcal{M}^0_\infty$, also

$$\mathcal{M}^0 \cong 1 + \pi\mathcal{O}_K[[X]] \times \mathcal{M}^0_\infty,$$

gleichbedeutend damit, dass die exakte Sequenz (von topologischen $\mathcal{T}^\infty$-Moduln)

$$1 \to 1 + \pi\mathcal{O}_K[[X]] \to \mathcal{M}^0 \stackrel{\mathcal{N}^\infty}{\to} \mathcal{M}^0_\infty \to 1$$

mit der Inklusion $\mathcal{M}^0_\infty \subset \mathcal{M}^0$ als Schnitt zerfällt. Mit anderen Worten: $\mathcal{M}^0_\infty$ ist ein Komplement von $1 + \pi\mathcal{O}_K[[X]]$ innerhalb $\mathcal{M}^0$.

Ferner wird gezeigt $\mathcal{M}_\infty = (\mathcal{N}^\infty(X))^{\mathbb{Z}} \times V \times \mathcal{M}^0_\infty$, wobei $V \subset \mathcal{O}_K^\times$ die Menge der Einheitswurzeln aus K von zu p primer Ordnung sei ($q = p^e$).

Das erinnert schon an die Struktur $K^\times = \pi^{\mathbb{Z}} \times \mu_{q-1} \times U^1(K)$ der multiplikativen Gruppe eines lokalen Körpers K mit Restkörper $\kappa := \kappa_K$ und $q := \#\kappa$. Für den Körper $\kappa((X))$ heißt das $\kappa((X))^\times \cong X^{\mathbb{Z}} \times \kappa^\times \times (1 + X \cdot \kappa[[X]])$, und das Ziel ist $\mathcal{M}_\infty \cong \kappa((X))^\times$.

Neben den Abbildungen $(\mathcal{N}^\infty(X))^{\mathbb{Z}} \cong X^{\mathbb{Z}}$ und $V \stackrel{\bmod \pi}{\cong} \kappa^\times$ (Teichmüller-Abbildung) braucht man vor allem $\mathcal{M}^0_\infty \cong 1 + X \cdot \kappa[[X]]$.

Man benutzt die exakte Sequenz

$$1 \to 1 + \pi\mathcal{O}_K[[X]] \to \mathcal{M}^0 \stackrel{\mathrm{red}}{\to} 1 + X \cdot \kappa[[X]] \to 1.$$

Dabei sei $\mathrm{red} := \mathrm{red}_\pi$ die Reduktion der Koeffizienten modulo π. Es ist $1+\pi\mathcal{O}_K[[X]]$ offenbar genau der Kern der Reduktion, und die Reduktion ist surjektiv, da man ein Urbild für eine Potenzreihe aus $1+X\cdot\kappa[[X]]$ erhält, indem man von den Koeffizienten aus κ Repräsentanten in $\mathcal{O}_K$ wählt. Die beiden exakten Sequenzen ergeben zusammen:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1+\pi\mathcal{O}_K[[X]] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1+\pi\mathcal{O}_K+X\mathcal{O}_K[[X]] \arrow[r, "\mathrm{red}"] \arrow[d, equal] & 1+X\cdot\kappa[[X]] \arrow[r] \arrow[d, dotted, shift right, "(?)"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & 1+\pi\mathcal{O}_K[[X]] \arrow[r] & \mathcal{M}^0 \arrow[r, shift left, "\mathcal{N}^\infty"] & \mathcal{M}^0_\infty \arrow[r] \arrow[l, hook', shift left, "\mathrm{incl}"] \arrow[u, dotted, shift right, "\mathrm{red}"'] & 1
\end{tikzcd}$$

Da die zweite Zeile zerfällt, kann man nun die Abbildung $\mathcal{M}^0_\infty \overset{\mathrm{incl}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}^0 = 1+\pi\mathcal{O}_K + X\mathcal{O}_K[[X]] \to 1+X\cdot\kappa[[X]]$ betrachten. Daraus erhält man die Isomorphismen

$$\mathcal{M}^0_\infty \overset{(1)}{\overset{\sim}{\to}} \mathcal{M}^0/1+\pi\mathcal{O}_K[[X]] \overset{(2)}{\overset{\sim}{\to}} 1+X\cdot\kappa[[X]]$$

wegen der Exaktheit der zweiten bzw. der ersten Zeile. Insbesondere haben $f\in\mathcal{M}^0$ und $\mathcal{N}^\infty(f)\in\mathcal{M}^0_\infty$ dieselbe Reduktion in $1+X\cdot\kappa[[X]]$:

$$\mathrm{red}(\mathcal{N}^\infty P) = \mathrm{red}P.$$

Insgesamt gilt also

$$\mathcal{M}^0_\infty \overset{\mathrm{red}}{\cong} 1+X\cdot\kappa[[X]].$$

Die Abbildung (?) des Diagramms ergibt sich also durch Bildung einer beliebigen Liftung von $p(X)\in 1+X\cdot\kappa[[X]]$ in $\mathcal{M}^0$ und anschließender Anwendung von $\mathcal{N}^\infty$.

5.57 Bemerkung ([Col79] Abschnitt IV im Fall $H=K$; Ergebnis): Nach Wahl von $l\in\mathfrak{F}(K,\pi,q)$ und eines Erzeugers $w=(w_i)_{i\in\mathbb{N}}\in T_l$ stellt das Korollar 17 aus [Col79] stetige Isomorphismen multiplikativer Gruppen sicher:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_K(K_\pi)^\times \cong \varprojlim_i K_i^\times \arrow[dr, shift left, "\mathcal{C}_{l,w}"] & & \kappa((X))^\times \arrow[dl, shift left, "\overline{\mathcal{N}_l^\infty}"] \\
& \mathcal{C}(K,l) \arrow[ul, shift left, "\mathrm{ev}_w"] \arrow[ur, shift left, "\mathrm{red}_\pi"] &
\end{tikzcd}$$

Diese respektieren die drei Bewertungen: Die Bewertung des Normenkörpers und die Exponentenbewertungen auf den Laurent- bzw. Colemanpotenzreihen ((erster auftretender Exponent).
Links: Zu einem Element $\beta=(\beta_i)_i$, $\beta_i\in K_i^\times$, des Normenkörpers hat man nach Hilfssatz 5.50 die einzige Colemanpotenzreihe $g:=\mathcal{C}_{l,w}(\beta)$ mit $ev_w(g)=g(w)=\beta$, das heißt, $g(w_i)=\beta_i$ für alle i.
Rechts: Die Untergruppe (Multiplikation von Potenzreihen) der Colemanpotenzreihen $\mathcal{C}(\tilde{K},l)\subset\mathcal{O}_{\tilde{K}}((X))^\times$ wird durch Reduktion der Koeffizienten modulo π isomorph auf $\kappa((X))^\times$ abgebildet. Umgekehrt wählt man zu einer Potenzreihe $\bar{g}$ mit Koeffizienten in κ eine beliebige Liftung $\tilde{g}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$. Der Operator $\mathcal{N}_l^\infty$ macht daraus nach Folgerung 5.40 eine Colemanpotenzreihe g unter Beibehaltung der Reduktion.
Die waagerechte Isomorphie lässt sich ausweiten zu einer Körperisomorphie. In [Sti02] Satz 2.31 wird gezeigt, dass die Abbildung verträglich mit der Addition im Normenkörper ist.

Man erkennt eine Addition $g_1 +_{\mathcal{C}} g_2 := \mathcal{N}_l^\infty(g_1 + g_2)$ auf der Menge der Colemanpotenzreihen.

5.58 Bemerkung: Im K_0-Fall betrachtet man die $G(K|K_0) \cong G(\kappa|\kappa_0)$-Invarianten und erhält

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_{K_0}(K_{0,\infty})^\times \cong \varprojlim_i K_{0,i}^\times \arrow[dr, shift left, "\mathcal{C}_{l,w}"] & & \kappa_0((X))^\times \arrow[dl, shift left, "\overline{\mathcal{N}_l^\infty}"] \\
& \mathcal{C}(K_0, l) \arrow[ul, shift left, "\mathrm{ev}_w"] \arrow[ur, shift left, "\mathrm{red}_\pi"] &
\end{tikzcd}$$

Es gibt genügend Colemanpotenzreihen mit Koeffizienten in K_0: Zu $\bar{g} \in \kappa_{K_0}((X))$ ist $g := \mathcal{N}_l^\infty(g) \in \mathcal{C}(K_0, l)$ mit $\mathrm{red}(g) = \bar{g}$. Die zur Körperisomorphie ausgeweitete Waagerechte ergibt

$$\mathbb{X}_{K_0}(K_{0,\infty}) \cong \kappa_0((X)).$$

5.59 Bemerkung (Abstiegssatz): Schließlich wird der K_0-Fall, das ist eine Aussage für das Paar (K, K_0) auf das Paar (K^f, K) aus Kapitel 4 angewandt. Sei $l_f \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f)$ und w ein mit $\mathcal{F}_\pi$ verträglicher Erzeuger von T_{l_f}. Dann hat man die Situation:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_{K^f}(K_\pi^f)^\times \arrow[r, shift right, "\mathcal{C}_{l_f,w}"'] & \mathcal{C}(K^f, l_f) \arrow[l, shift right, "\mathrm{ev}_w"'] \arrow[r, shift right, "\mathrm{red}_\pi"'] & \kappa_f((X))^\times \arrow[l, shift right, "\overline{\mathcal{N}_{l_f}^\infty}"'] \\
\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))^\times \arrow[u, hook] \arrow[r, shift right, "\mathcal{C}_{l_f,w}"'] & \mathcal{C}(K, l_f) \arrow[u, hook] \arrow[l, shift right, "\mathrm{ev}_w"'] \arrow[r, shift right, "\mathrm{red}_\pi"'] & \kappa((X))^\times \arrow[u, hook] \arrow[l, shift right, "\overline{\mathcal{N}_{l_f}^\infty}"']
\end{tikzcd}$$

Das heißt, die Isomorphismen aus dem abelschen Fall ergeben durch Einschränkung Isomorphismen auf Teilkörpern. Die Ausweitungen erfüllen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_{K^f}(K_\pi^f) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \kappa_f((X))^\times \\
\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f)) \arrow[u, hook] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \kappa((X)). \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

5.4 Thetaabbildung und Colemantheorie

Dieser Abschnitt ist eine Skizze, wie im Fall eines Basispunktansatzes - der in dieser Arbeit jedoch nicht verfolgt wird - die Colemantheorie die Thetaabbildungen aus Abschnitt 4.5 konkretisieren könnte.

5.60 Bemerkung: Sei $f|f'$, dann ergibt sich folgende Situation

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}(\mathbb{X}_{f'}) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "N"] & \mathcal{C}^1(K,l') \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\vartheta"] & X\cdot\kappa[[X]]^\times \arrow[d, "\vartheta_{f|f'}"] \\
\mathscr{P}(\mathbb{X}_f) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{C}^1(K,l) \arrow[r, leftrightarrow] & X\cdot\kappa[[X]]^\times,
\end{tikzcd}$$

wobei C^1 die Colemanpotenzreihen in $X\cdot\mathcal{O}_K[[X]]^\times$ bezeichne. Die Abbildung $\vartheta_{f|f'}$ entsteht nach Wahl von $l'\in\mathfrak{F}(K,\pi,q^{f'})$ und $l\in\mathfrak{F}(L,\pi,q^f)$, ferner je eines mit $\mathcal{F}_\pi$ verträglichen Erzeugers $w'\in T_{l'}$ und $w\in T_l$ folgendermaßen:

(i) Einer Potenzreihe $\bar{c}'\in X\cdot\kappa[[X]]^\times$ wird die Colemanpotenzreihe $c':=\mathcal{N}_{l'}^\infty(\tilde{c}')\in\mathcal{C}^1(K,l')$ einer beliebigen Liftung $\tilde{c}'\in X\cdot\mathcal{O}_K[[X]]^\times$ zugeordnet.

(ii) Die Einsetzung $\mathrm{ev}_{l'}(c')$ entspricht einem Primelement $\hat{\pi}'\in\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f'))$.

(iii) Ausdünnen von $\hat{\pi}'$ zu einem Element $N(\hat{\pi}')=:\hat{\pi}\in\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f)$.

(iv) Reduktion der Koeffizienten der Colemanpotenzreihe $c:=\mathcal{C}^1_{l,w}(\hat{\pi})\in\mathcal{C}(K,l)$ modulo π zu einer Potenzreihe $\bar{c}\in X\cdot\kappa[[X]]^\times$.

Ohne Basispunkt ist die Abbildung wegen der vielen Wahlen ungeeignet.

5.61 Bemerkung: Es gilt die Normierung $\vartheta(X)=X$ genau dann, wenn $l'\in\mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K,\pi,q^{f'})$ und $l\in\mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(L,\pi,q^f)$ verträglich im Sinne von Definition 4.14 sind. Im Sinne von Kapitel 6 bedeutet das $V_{f|f'}(l')=l$.

6 Eine Beschreibung der Faser mittels Lubin-Tate-Potenzreihen

In diesem Kapitel wird eine Verträglichkeitsabbildung für normische Lubin-Tate-Potenzreihen gefunden und zur Beschreibung der Faser $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$ für ein $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{spec}(K^{1*}|K)$ genutzt. Dieses Vorgehen vervollständigt das Kapitel 6 des Artikels [MZ05] von Julia Mehlig und Ernst-Wilhelm Zink, wo ein Subquotient der Faser $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}$ durch Konjugationsklassen normischer Lubin-Tate-Potenzreihen beschrieben wurde:

$$\mathbb{S}_m := \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(m)^{1*}|K)_{[\pi]}[m] \leftrightarrow G(K(\pi)^m|K(\pi)) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K(\pi)^m, \pi, q^{f_\pi m})$$

Hier wird zunächst die auf $L_\pi|L$ bezogene Bijektion

$$G(L_\pi|L) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_L(L_\pi)) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(L, \pi, q_L)$$

im Fall $L := K^f$ nach links auf die fastabelsche Erweiterung $\mathcal{F}_\pi(f)|K$ heruntergedrückt (Folgerung 6.7)

$$H_{1,f} \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_f) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f),$$

wobei $H_{1,f} := G(K^f_\pi|K^f)^{G(K^f_\pi|\mathcal{F}_\pi(f))} \cong \mathrm{Aut}_K(\mathcal{F}_\pi(f))$ und $\mathbb{X}_f := \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))$.
Die Betrachtung von $\pi \in K$ und Mikroprimstellen vom Grad 1 führt auf die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f')}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f'))[1] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \mathscr{P}_{f'} \arrow[d, "N"] & \text{und} & H_{1,f'} \setminus \mathscr{P}_{f'} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "N"] & \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^{f'}) \arrow[d, "V_{f|f'}"] \\
\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1] \arrow[r, leftrightarrow] & \mathscr{P}_f & & H_{1,f} \setminus \mathscr{P}_f \arrow[r, leftrightarrow] & \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f),
\end{tikzcd}$$

wobei $\mathscr{P}_f := \mathscr{P}(\mathbb{X}_f)$. Ganz rechts erhält man eine wohldefinierte Verträglichkeitsabbildung (Definition 6.10, Hilfssätze 6.13, 6.14), diese ergibt sich für $f|f'$ stets:

$$V_{f|f'} : \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^f, \pi, q^{f'}) \to \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^f, \pi, q^f).$$

Die Quotienten im rechten Diagramm sind zunächst zu grob, um die Mikroprimstellen zu beschreiben. Jedoch ergibt sich im projektiven Limes wegen der lokalen Unverzweigtheit der Erweiterung $K^{1*}|K$ die Bijektion

$$\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[1] \longleftrightarrow \varprojlim_{f, V_{f|f'}} \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f) =: \hat{\mathfrak{F}}(K, \pi),$$

die eine Teilmenge der Faser mittels Abfolgen verträglicher normischer Lubin-Tate-Potenzreihen beschreibt (Satz 6.18).

Im allgemeinen Fall $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$ und für K-Mikroprimstellen, deren Relativgrad die Zahl m teilt, ergibt als Hauptsatz 6.39 sich

$$\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[m] \leftrightarrow G(K(\pi)^m|K(\pi)) \setminus \varprojlim_f \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K(\pi)^m, \pi, q^{f_\pi m f}),$$

wobei $f_\pi := [K(\pi) : K]$, um anschließend (Satz 6.51) die gesamte Faser als

$$\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]} \leftrightarrow \varinjlim_m G(K(\pi)^m|K(\pi)) \setminus \hat{\mathfrak{F}}(K(\pi)^m, \pi)$$

zu erhalten, wobei $\hat{\mathfrak{F}}(K(\pi)^m, \pi) := \varprojlim_f \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K(\pi)^m, \pi, q^{f_\pi m f})$.

6.1 Galoisoperation auf Primelementen des Normenkörpers

Sei wieder K ein p-adischer Körper, $q := \#\kappa_K$ die Restkörperordnung, $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$ ein Primelement, $M := K(\pi)$ und $f_\pi := f_{M|K} = [M : K]$. Dann hat man nach Satz 3.82, das ist Theorem 2 aus dem Artikel von Mehlig und Zink, die Bijektion

$$\operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[f] \leftrightarrow G(M^f|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^f, \pi, q^{f_\pi f}).$$

Grundlegend sind die beiden folgenden Fälle:

1. Wenn $f = 1$, dann fällt rechts die Galoisoperation weg und $\mathcal{F}_\pi(1) = M_\pi$:

$$\operatorname{spec}((M_\pi)^{1*}|K)_{[\pi]}[1] \leftrightarrow G(M_\pi|M) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(M_\pi)) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M, \pi, q^{f_\pi}).$$

2. Ist neben $f = 1$ auch $\pi \in K$, also $f_\pi = 1$ und $\mathcal{F}_\pi(1) = K_\pi$, hat man:

$$\operatorname{spec}((K_\pi)^{1*}|K)_{[\pi]}[1] \leftrightarrow G(K_\pi|K) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(K_\pi)) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q).$$

Die normischen Lubin-Tate-Potenzreihen kommen für einen p-adischen Körper L mit $\#\kappa_L =: q_L < \infty$, $\pi \in L$ Primelement und L_π die maximal abelsch reinverzweigte Erweiterung von L mit universeller Norm π nach Hilfssatz 3.79 wie folgt ins Spiel:

$$G(L_\pi|L) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_L(L_\pi)) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(L, \pi, q_L).$$

Sei zunächst $L := K^f$, also $q_L = q^f$, und $\pi \in K$. Dann ist $K^f_\pi|K^f$ normal, und es ergeben sich auf diese Weise die Bijektion

$$G(K^f_\pi|K^f) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_{K^f}(K^f_\pi)) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^f, \pi, q^f) \tag{6.1}$$

und die Surjektion

$$\mathscr{P}(\mathbb{X}_{K^f}(K^f_\pi)) \twoheadrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^f, \pi, q^f).$$

Die Menge der normischen Lubin-Tate-Potenzreihen ist zu grob, um die Menge der Primelemente im Normenkörper zu beschreiben. Das Ziel des Abschnitts ist nun, die Abbildungen auf das K-Niveau zu drücken.

<u>6.1 Definition:</u> Sei zunächst f fest und seien folgende Galoisgruppen bezeichnet

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_\pi(f) \arrow[r, dash, "S"] \arrow[d, dash] & K_\pi^f \arrow[d, dash, "H"] \\
K \arrow[r, dash] & K^f
\end{tikzcd}$$

$$S := S_f := G(K_\pi^f|\mathcal{F}_\pi(f)) \cong G(\mathbb{X}_K(K_\pi^f)|\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))) \cong G(K^f|K),$$
$$H := H_f := G(K_\pi^f|K^f) \cong (K^f)^\times/\langle\pi\rangle$$

nach Klassenkörpertheorie, insbesondere $\mathcal{F}_\pi(1) = K_\pi$ und $H_1 = G(K_\pi|K)$, ferner die Menge

$$P := P_f := \mathscr{P}(\mathbb{X}_{K^f}(K_\pi^f))$$

der Primelemente im Normenkörper und schließlich

$$F := F_f := \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^f, \pi, q^f).$$

Damit lautet die Bijektion (6.1): $H \setminus P \leftrightarrow F$.

<u>6.2 Hilfssatz:</u> Die Bijektion $H \setminus P \leftrightarrow F$ ist verträglich mit der Aktion von S:

$$H^S \setminus P^S \leftrightarrow F^S.$$

Beweis: Auf der rechten Seite operiert die Galoisgruppe S durch Konjugation: $s \cdot l := s \circ l \circ s^{-1}$. Wegen $s \circ (\sum a_i X^i) \circ s^{-1} = s \circ (\sum a_i s^{-1}(X)^i) = s(\sum a_i s^{-1}(X^i)) = \sum s(a_i) X^i$ entspricht dies der Anwendung auf die Koeffizienten, und es gilt $\mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^f, \pi, q^f)^S = \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f)$. Auf P operiert S durch Anwendung, und $P^S = \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))) = \mathscr{P}(\mathbb{X}_f)$ sind die galoisinvarianten Primelemente. Schließlich auf H durch Konjugation, und es gilt $H^S \cong H_1$.

Die Gruppe S normalisiert die Gruppe H: $sHs^{-1} = H$, denn die Elemente von S führen den Körper K^f in sich über, also ist mit x auch $s^{-1}(x) \in K^f$, damit $(shs^{-1})(x) = s(h(s^{-1}(x))) = s(s^{-1}(x)) = x$. Der Quotient $H \setminus P$ besteht aus H-Bahnen von Primelementen $\hat{\pi} \in P$, und wegen $sH\hat{\pi} = sHs^{-1}s\hat{\pi} = Hs\hat{\pi}$ hat man auch eine wohldefinierte Aktion von S auf $H \setminus P$. Daher hat man eine Bijektion $(H \setminus P)^S \leftrightarrow F^S$ zwischen den S-invarianten Elementen auf beiden Seiten.

Ferner ist $P^S \to (H \setminus P)^S$ surjektiv, denn mit $s\hat{\pi} = \hat{\pi}$ ist $sH\hat{\pi} = (sHs^{-1})(s\hat{\pi}) = H\hat{\pi}$, daher ist die Abbildung wohldefiniert. Sei nun $H\hat{\pi}$ eine S-invariante Bahn, das heißt, $sH\hat{\pi} = Hs\hat{\pi} = H\hat{\pi}$, also $sH\hat{\pi} = H\hat{\pi} \Leftrightarrow s\hat{\pi} \in H\hat{\pi}$. Es gibt also ein $h \in H$ mit $s\hat{\pi} = h\hat{\pi}$. Ferner gilt $s^2\hat{\pi} = sh\hat{\pi} = shs^{-1}s\hat{\pi} = shs^{-1}h\hat{\pi}$ usw., und $\hat{\pi} = s^f\hat{\pi} = s^{f-1}hs^{1-f} \cdots shs^{-1}h\hat{\pi} = N_S(h)\hat{\pi}$. Nach Obigem folgt $N_S(h) = \mathrm{id}$, und h ist im Kern der Norm. Da $S \cong \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ zyklisch ist, gilt $H^1(S,H) = H^{-1}(S,h) = \{1\}$, somit $h \in \ker(N_S) = H^{s-1}$. Wegen $h = h_1^{s-1} = sh_1s^{-1}h_1^{-1}$ ist $s\hat{\pi} = h\hat{\pi} = sh_1s^{-1}h_1^{-1}\hat{\pi}$, das heißt, $sh_1^{-1}\hat{\pi} = h_1^{-1}\hat{\pi}$ ist S-invariantes Element der H-Bahn von $\hat{\pi}$. Die Abbildung $H^S \setminus P^S \leftrightarrow (H \setminus P)^S$ ist bijektiv, denn für $h \in H^S$ ist mit $s\hat{\pi} = \hat{\pi}$ auch $sh\hat{\pi} = shs^{-1}s\hat{\pi} = h^s\hat{\pi} = h\hat{\pi}$. Seien andererseits $\hat{\pi}$ und $\hat{\pi}'$ zwei S-invariante Primelemente, die zur selben S-invarianten H-Bahn gehören: $\hat{\pi}' = h\hat{\pi}$. Für alle $s \in S$ ist also $h\hat{\pi} = \hat{\pi}' = s\hat{\pi}' = sh\hat{\pi} = shs^{-1}\hat{\pi}$, damit $\hat{\pi} = h^{-1}shs^{-1}\hat{\pi} = h^{s-1}\hat{\pi}$. Aus Obigem folgt, dass dann $h^{s-1} = \mathrm{id}$, das heißt, $h^s = h$, damit $h \in H^S$ ist. $\square$

<u>6.3 Satz:</u> Sei $\pi \in K$. Für alle $f \geq 1$ gilt

$$H_f^{S_f} \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f).$$

Beweis: Nach Hilfssatz 6.2 gilt ${H_f}^{S_f} \setminus {P_f}^{S_f} \leftrightarrow {F_f}^{S_f}$. Nun ist ${F_f}^{S_f} = \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f)$, ${P_f}^{S_f} = \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f)))$. □

<u>6.4 Hilfssatz:</u> Sei nun $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$, d ein Teiler von f, $U := G(M_\pi^f | \mathcal{F}_\pi(f)^d)$ und L der Fixkörper von H_f^U. Dann ist die Erweiterung $\mathcal{F}_\pi(f)^d | L \cap \mathcal{F}_\pi(f)$ galoissch mit der Galoisgruppe $H_f^U \rtimes S_f/U$. Gleichzeitig ist das die Gruppe der M-Automorphismen des Körpers $\mathcal{F}_\pi(f)^d$.
Beweis:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_\pi(f) \arrow[r, dash, "S_f/U"] \arrow[d, dash] & \mathcal{F}_\pi(f)^d \arrow[r, dash, "U"] \arrow[d, dash] & M_\pi^f \arrow[d, dash, "H_f^U"] \\
L \cap \mathcal{F}_\pi(f) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \bullet \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L \arrow[d, dash] \\
M = K(\pi) \arrow[r, dash] & M^d \arrow[r, dash] & M^f
\end{tikzcd}$$

Der Fall $d = f$ ist bereits klar, es gilt $G_f := G(M_\pi^f | M) = H_f \rtimes S_f$. Nun werden Elemente $\sigma \in G_f$ gesucht mit $\sigma(\mathcal{F}_\pi(f)^d)) = \mathcal{F}_\pi(f)^d$. Gruppentheoretisch muss man den Normalisator von U in G_f finden. Jedes Element von S_f führt $\mathcal{F}_\pi(f)^d$ in sich über, also gilt $S_f \subseteq N := N_{G_f}(U)$. Wegen $g = hs \in N \Leftrightarrow hsNs^{-1}h^{-1} = hNh^{-1} \overset{!}{=} N \Leftrightarrow h \in N$ braucht man nur noch $N \cap H_f$ zu betrachten. Sei $h \in H_f$, es gilt $hUh^{-1} = U$ genau dann, falls $huh^{-1} = u' \in U$ für alle $u \in U$, das heißt, $h = u'hu^{-1} = u'u^{-1}uhu^{-1}$. Da man im semidirekten Produkt ist, muss $1 = u'u^{-1}$ und $h = uhu^{-1}$ gelten, das heißt, $h \in H_f^U$. Also ist $N = H_f^U \rtimes S_f$ und $N/U = H_f^U \rtimes S_f/U = \mathrm{Aut}_M(\mathcal{F}_\pi(f)^d)$. Da ein semidirektes Produkt vorliegt, ist $\mathrm{Fix}(N) = \mathrm{Fix}(H_f^U) \cap \mathrm{Fix}(S_f)$, damit $N/U = \mathrm{Aut}_M(\mathcal{F}_\pi(f)^d) = G(\mathcal{F}_\pi(f)^d | L \cap \mathcal{F}_\pi(f))$. □

<u>6.5 Folgerung:</u> Für $d = 1$ hat man $U := S_f$, also $H_{1,f} := H_f^{S_f} \cong \mathrm{Aut}_M(\mathcal{F}_\pi(f))$ für alle f, das heißt, die Einschränkung auf $\mathcal{F}_\pi(f)$ ist eine Bijektion von $H_{1,f}$ auf $\mathrm{Aut}_M(\mathcal{F}_\pi(f))$. Die Gruppe $H_{1,f}$ wirkt also durch eine beliebige Fortsetzung. Ferner ist $\mathrm{Aut}_M(\mathcal{F}_\pi(f)) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_K(\mathcal{F}_\pi(f))$ bereits bijektiv, denn jeder K-Automorphismus von $\mathcal{F}_\pi(f)$ lässt die universelle Norm π invariant, damit auch den Körper $K(\pi) = M$.

<u>6.6 Folgerung:</u> Jeder K-Isomorphismus, welcher den Körper $\mathcal{F}_\pi(f)$ in sich überführt, muss auf $\mathcal{F}_\pi(f)^{H_{1,f}}$ die Identität sein.

<u>6.7 Folgerung:</u> Falls $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$, gilt

$$\mathrm{Aut}_K(\mathcal{F}_\pi(f)) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M, \pi, q^{f_\pi f}),$$

ist $\pi \in K$, gilt

$$\mathrm{Aut}_K(\mathcal{F}_\pi(f)) \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))) \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f)$$

für alle $f \geq 1$.

6.2 Eine kanonische Verträglichkeitsabbildung

In diesem Abschnitt soll eine Verträglichkeitsabbildung für normische Lubin-Tate-Potenzreihen gewonnen werden, die unabhängig von Wahlen ist. Sie ist verwandt mit einer Normabbildung. Sei zunächst $\pi \in K$.

6.8 Hilfssatz: Sei $f|f'$, dann induziert die Einschränkung $\mathrm{res} : H_{f'} \to H_f$ eine Abbildung

$$\mathrm{res} : H_{1,f'} \to H_{1,f}.$$

Beweis: Die Abbildung $\mathrm{res} : H_{f'} \to H_f$ ist wohldefiniert, denn die Einschränkung $h := h'|_{K_\pi^f} : K_\pi^f \to K_\pi^{f'}$ lässt den Körper $K^{f'} \cap K_\pi^f = K^f$ fest und führt wegen der Normalität von $K_\pi^f|K^f$ den Körper K_π^f in sich über, also $h \in H_f$. Genauso ist die Einschränkung $\mathrm{res} : S_{f'} \to S_f$ wohldefiniert: $s := s'|_{K_\pi^f} : K_\pi^f \to K_\pi^{f'}$ lässt den Körper $\mathcal{F}_\pi(f') \cap K_\pi^f = \mathcal{F}_\pi(f)$ fest und führt wegen der Normalität von $K_\pi^f|\mathcal{F}_\pi(f)$ den Körper K_π^f in sich über, also $s \in S_f$. Ferner ist $\mathrm{res} : S_{f'} \to S_f$ surjektiv: Dazu kann man wegen der Normalität von $K_\pi^f \mathcal{F}_\pi(f')|\mathcal{F}_\pi(f')$ den Zwischenschritt

$$S_{f'} = G(K_\pi^{f'}|\mathcal{F}_\pi(f')) \to G(K_\pi^f \mathcal{F}_\pi(f')|\mathcal{F}_\pi(f')) \to G(K_\pi^f|\mathcal{F}_\pi(f)) = S_f$$

einfügen. Der erste Schritt ist surjektiv, der zweite injektiv, denn $\mathcal{F}_\pi(f') \cap K_\pi^f = \mathcal{F}_\pi(f)$. Da die beiden letzten Galoisgruppen zyklisch von derselben endlichen Ordnung sind, ist der zweite Schritt auch surjektiv.
Die Gruppe S_f operiert auf dem Normalteiler H_f von $G(K_\pi^f|K)$ durch Konjugation. Für $h' \in H_{f'}$ mit $h' = s'h'(s')^{-1}$ für alle $s' \in S_{f'}$ gilt $h = (s'h'(s')^{-1})|_{K_\pi^f} = shs^{-1}$, und wegen der Surjektivität von $\mathrm{res} : S_{f'} \to S_f$ ist h ein S_f-invariantes Element. $\square$

6.9 Folgerung: Sei $f|f'$, dann induziert die Ausdünnung $N : \mathscr{P}_{f'} \to \mathscr{P}_f$ die Ausdünnung $N : H_{1,f'} \setminus \mathscr{P}_{f'} \to H_{1,f} \setminus \mathscr{P}_f$.
Beweis: Wenn $\hat{\pi}' \in \mathscr{P}_{f'}$ auf $\hat{\pi} := N(\hat{\pi}') \in \mathscr{P}_f$ abgebildet wird, soll für alle $h' \in H_{f'}^{S_f}$ das Bild $N(h'\hat{\pi}')$ in der $H_f^{S_f}$-Bahn von $\hat{\pi}$ liegen. Nach Hilfssatz 6.8 ist dies wegen $N(h'\hat{\pi}') = h'|_{K_\pi^f}\hat{\pi}$ der Fall. $\square$

6.10 Definition: Die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_{1,f'} \setminus \mathscr{P}_{f'} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "N"] & \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K,\pi,q^{f'}) \arrow[d, dotted, "V_{f|f'}"] \\
H_{1,f} \setminus \mathscr{P}_f \arrow[r, leftrightarrow] & \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K,\pi,q^f)
\end{tikzcd}$$

kommutativ machende rechte Senkrechte heiße die **Verträglichkeitsabbildung**

$$V_{f|f'} : \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K,\pi,q^{f'}) \to \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K,\pi,q^f)$$

für normische Lubin-Tate-Potenzreihen. Nach Definition ist das $V_{f|f'}(l')$ verträglich mit l' im Sinne der Definition 4.14.

6.11 Folgerung: Der Übergang mit dem Diagramm zum projektiven Limes ergibt:

$$\varprojlim_f H_{1,f} \setminus \mathscr{P}(X_f) \leftrightarrow \varprojlim_f \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f)$$

6.12 Folgerung: Nimmt man in Definition 6.10 statt K den lokalen Körper K^n und $\pi \in K^n$, ergibt sich entsprechend

$$V_{nf|nf'} : \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf'}) \to \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf}).$$

6.13 Hilfssatz: Die Abbildung $V_{f|f'}$ ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{F}_\pi$.

Beweis: Jede andere Wahl ist von der Form $\sigma(\mathcal{F}_\pi)$ mit einem $\sigma \in G(K^{1*}|K^{\mathrm{nr}})$, denn $G(K^{1*}|K) = G(K^{1*}|K^{\mathrm{nr}}) \rtimes G(K^{1*}|\mathcal{F}_\pi)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f'))) \arrow[rr, dotted] \arrow[dd] & & \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\sigma(\mathcal{F}_\pi(f')))) \arrow[dd] \\
& \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^{f'}) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
\mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))) \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(\sigma(\mathcal{F}_\pi(f)))) \arrow[dl] \\
& \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^{f}) &
\end{tikzcd}$$

Wird das Primelement $\hat{\pi} \in \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f))$ auf die normische Lubin-Tate-Potenzreihe $l \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f)$ abgebildet, dann wird $\sigma(\hat{\pi}) \in \mathbb{X}_K(\sigma(\mathcal{F}_\pi(f)))$ auf ${}^\sigma l = l$ abgebildet, da σ durch Anwendung auf die Koeffizienten von l wirkt. Damit ändert sich auf der Seite der normischen Lubin-Tate-Potenzreihen nichts. □

6.14 Hilfssatz: In Termen der Colemantheorie (K_0-Fall von [KS96] Lemma 0.3 in der Situation $(K^{f'}, K)$ bzw. (K^f, K) für (K, K_0)) ergibt sich die Abbildung wie folgt: Für $l' \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^{f'})$ wird ein mit $\mathcal{F}_\pi$ verträglicher Erzeuger $w' = (w'_n)_n$ von $T_{l'}$ gewählt. Ferner sei $\tilde{l} \in \mathfrak{F}(K, \pi, q^f)$ beliebig und $\tilde{w}$ ein mit $\mathcal{F}_\pi$ verträglicher Erzeuger von $T_{\tilde{l}}$. Zu $w := (N_{K^f(w'_n)|K(\tilde{w}_n)}(w'_n))_n$ bildet man $g := \mathcal{C}_{\tilde{l},\tilde{w}}(w) \in \mathcal{C}(K, \tilde{l})$. Damit ist

$$V_{f|f'}(l') = g \circ \tilde{l} \circ g^{(-1)} =: l \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f),$$

unabhängig von der Wahl von w', $\tilde{l}$ und $\tilde{w}$.

Beweis: Ein mit $\mathcal{F}_\pi$ verträglicher Erzeuger w' entspricht einem Primelement im Normenkörper $\mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi(f')$. Nach Satz 6.3 sind alle Wahlmöglichkeiten innerhalb des richtigen $H_{1,f'}$-Orbits. Die Lubin-Tate-Potenzreihe l erfüllt: $l(w_{n+1}) = (g \circ \tilde{l})(\tilde{w}_{n+1}) = g(\tilde{w}_n) = w_n$ und $l(w_1) = (g \circ \tilde{l})(\tilde{w}_1) = g(0) = 0$, da die Colemanpotenzreihe g Bild eines Primelements ist. Damit ist w ein Erzeuger von T_l, was l bereits eindeutig bestimmt nach Hilfssatz 5.47. □

6.3 Mikroprimstellen vom Grad 1

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass für $\pi \in K$ die Mikroprimstellen aus $\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[1]$ durch Abfolgen verträglicher normischer Lubin-Tate-Potenzreihen beschrieben werden können.

6.15 Bemerkung: Nach Hilfssatz 4.7, Folgerung 4.29, Folgerung 4.31 und Folgerung 6.11 hat man zwei Abbildungen

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[1] \arrow[d, leftrightarrow] & \\
\operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(\mathcal{F}_\pi^{1*}|\mathcal{F}_\pi)[1] \arrow[d, leftrightarrow] & \\
\varprojlim_f \operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1] \arrow[d, leftrightarrow] & \varprojlim_f H_{1,f} \backslash \operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1] \arrow[d, leftrightarrow] \\
\varprojlim_f \operatorname{spec}(\mathbb{X}_f^{1*}|\mathbb{X}_f))[1] \arrow[d, leftrightarrow] & \varprojlim_f H_{1,f} \backslash \operatorname{spec}(\mathbb{X}_f^{1*}|\mathbb{X}_f))[1] \arrow[d, leftrightarrow] \\
\varprojlim_f \mathscr{P}(X_f) & \varprojlim_f H_{1,f} \backslash \mathscr{P}(X_f) \arrow[d, leftrightarrow] \\
& \varprojlim_f \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f).
\end{tikzcd}
$$

Diese sollen in der vorletzten Zeile verbunden werden.

Sei $E_f := \mathscr{P}(X_f)$ und $G_f := H_{1,f}$. Die Mengen E_f sind topologische Räume mit der proendlichen Topologie, die mit der Bewertungstopologie des Normenkörpers übereinstimmt. Als Nebenklasse der Einheitengruppe des Ganzheitsringes des Normenkörpers $\mathbb{X}_f$ sind die Mengen E_f kompakt. Das System $(E_f, N_{f|f'})$ mit den stetigen und surjektiven Ausdünnungsabbildungen $N_{f|f'} : E_{f'} \to E_f$ ist projektiv.

Die Gruppen G_f sind kompakt. Das System $(G_f, r_{f|f'})$ mit den stetigen Abbildungen $r_{f|f'} : G_{f'} \to G_f$ ist projektiv. Die Gruppen G_f operieren stetig und äquivariant auf den Mengen E_f:

$$N_{f|f'}(g_{f'} \cdot e_{f'}) = r_{f|f'}(g_{f'}) \cdot N_{f|f'}(e_{f'}).$$

6.16 Hilfssatz ([Bou90] III.58 §7 Proposition 1): Ist für jedes f und jedes $e_f \in E_f$ der Stabilisator $S(f, e_f) := \{g_f \in G_f \mid g_f \cdot e_f = e_f\}$ eine kompakte Untergruppe von G_f, dann ist die kanonische Abbildung $h : \varprojlim_f G_f \backslash \varprojlim_f E_f \to \varprojlim_f (G_f \backslash E_f)$ injektiv. Ist für jedes f und jedes $e_f \in E_f$ die G_f-Bahn $B(f, e_f)$ von e_f kompakt, so ist h surjektiv.

6.17 Hilfssatz: Es gilt $\varprojlim_f H_{1,f} = \{1\}$.

Beweis: Ähnlich wie bei Hilfssatz 3.21 hat man nach Klassenkörpertheorie das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_{1,f'} \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, "\cong"] & H_{1,f} \arrow[d, "\cong"] \\ U(K^{f'})^{\tilde{S}_{f'}} \arrow[r, "N_{K^{f'}|K^f}"] & U(K^f)^{\tilde{S}_f}, \end{tikzcd}$$

wobei $\tilde{S}_f := G(K^f|K) \cong S_f$ und $U(K^{f'})^{\tilde{S}_{f'}} = U(K)$. Da $G(K^{f'}|K^f)$ eine Untergruppe von $\tilde{S}_{f'}$ ist, erhebt die Norm diese $\tilde{S}_{f'}$-invarianten Elemente lediglich in die $\frac{f'}{f}$-te Potenz. Damit ist $\varprojlim_f H_{1,f} \cong \varprojlim_f U(K)$ bezüglich der Potenzabbildungen im zweiten Limes. Für jede Komponente $x_K \in U(K)$ eines Elementes $(x_K)_K$ des Limes gilt $x_{K'}^{[K':K]} = x_K$ für jedes $K'|K$, und x_K ist beliebige Potenz, also $x_K = 1$, damit $\varprojlim_f H_{1,f} = \{1\}$. □

6.18 Satz: Die beiden Abbildungen aus Bemerkung 6.15 lassen sich an der Stelle $\varprojlim_f \mathscr{P}(X_f) \leftrightarrow H_{1,f} \setminus \varprojlim_f \mathscr{P}(X_f)$ verbinden zu

$$\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[1] \leftrightarrow \varprojlim_f \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K, \pi, q^f).$$

Beweis: Da der Stabilisator $S(f, e_f)$ hier eine abgeschlossene Untergruppe im kompakten Hausdorffraum ist, ist er ebenfalls kompakt. Die Bahn $B(f, e_f)$ ist als stetiges Bild eines Kompaktums immer kompakt. Damit folgt nach dem Hilfssatz 6.16 die Bijektivität von $\varprojlim_f G_f \setminus \varprojlim_f E_f \to \varprojlim_f G_f \setminus E_f$. Da nach Hilfssatz 6.17 bereits $\varprojlim_f G_f = 1$ ist, folgt die Behauptung. □

6.19 Folgerung: Mit denselben Argumenten erhält man im Fall $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$ und dem Grundkörper $M = K(\pi) \ni \pi$ die Bijektion

$$\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[1] \leftrightarrow \varprojlim_f \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M, \pi, q^{f_\pi f}).$$

6.20 Bemerkung: Damit sind die Abbildungen auch an den anderen Stellen verbunden, zum Beispiel an der Stelle

$$\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(\mathcal{F}_\pi^{1*}|\mathcal{F}_\pi)[1] \leftrightarrow \varprojlim_f H_{1,f} \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1].$$

Während die Untergruppe $H_{1,f} = H_f^{S_f}$ von H_f den Körper $\mathcal{F}_\pi(f)$ in sich überführt, führt kein Element der Gruppe $H_\infty = G(K^{1*}|K^{\mathrm{nr}})$ den Körper $\mathcal{F}_\pi$ in sich über. Für $f|f'$ hat man das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H_{f'}^{S_{f'}} \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f')}(\mathcal{F}_\pi(f')^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f'))[1] \arrow[d] \\
\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(\mathcal{F}_\pi^{1*}|\mathcal{F}_\pi)[1] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & H_f^{S_f} \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1]
\end{tikzcd}$$

Die beiden Abbildungen nach rechts sind Vergröberungen der bereits bekannten, die senkrechte ist wohldefiniert wie $V_{f|f'}$, damit erhält man eine wohldefinierte Bijektion auf den projektiven Limes:

$$\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi}(\mathcal{F}_\pi^{1*}|\mathcal{F}_\pi)[1] \leftrightarrow \varprojlim_f H_{1,f} \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1].$$

6.4 Verbindung zum Subquotienten $\mathbb{S}_1$

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie für $\pi \in K$, das heißt, $M = K$, die Komponenten $H_{1,f} \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1]$ des projektiven Limes mit den Subquotienten aus dem Artikel [MZ05] von Mehlig und Zink zusammenhängen.

6.21 Hilfssatz: Der Mehlig-Zink-Subquotient $\mathbb{S}_1$ stimmt mit der ersten Komponente des projektiven Limes überein.
Beweis: Das ist der erste Identifikationsschritt 3.72 im Fall $f = 1$. Wegen $\mathcal{F}_\pi(1) = M_\pi$ und $H_{1,1} = H_1^{S_1} = H_1 = G(M_\pi|M)$ hat man die Bijektionen

$$\mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(1)^{1*}|K)_{[\pi]}[1] \leftrightarrow H_1 \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(1)}(\mathcal{F}_\pi(1)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(1))[1] \leftrightarrow H_1 \setminus \mathscr{P}(\mathbb{X}_K(M_\pi)). \qquad \square$$

6.22 Bemerkung: Man kann die Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(1)}(\mathcal{F}_\pi(1)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(1))[1] \to \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(1)^{1*}|K)_{[\pi]}[1]$ direkt angeben: Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(1)}(\mathcal{F}_\pi(1)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(1))[1]$ und $\mathcal{F}$ ein $\mathfrak{p}$ erzeugender, minimaler Frobeniuskörper innerhalb $\mathcal{F}_\pi(1)^{1*}$, also $f_{\mathcal{F}|M} = 1$. Da $\mathcal{F}$ den Körper $\mathcal{F}_\pi(1) = M_\pi$ enthält, ist π die universelle Norm der Erweiterung $\mathcal{F}|M$, und $\mathcal{F}$ erzeugt eine Mikroprimstelle, die zur rechten Seite gehört.

6.23 Bemerkung: Um genaueres zu sehen, kombiniert man Diagramm aus [Meh03] Lemma 7.2 (ii) mit Hilfssatz 4.20:

$$\begin{tikzcd}
G(M_\pi^f|M) \setminus \mathrm{spec}_{M_\pi^f}((M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f)[1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{spec}((M_\pi^f)^{1*}|M)_\pi[f] \arrow[d] \\
\sim \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[f] \arrow[r] \arrow[ur] & \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[f].
\end{tikzcd}$$

Alle Abbildungen sind Bijektionen von abgeschlossen Mikroklassen. Die untere Waagerechte lässt sich genauer angeben: Es bestehe $\operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[=d]$ aus den Mikroprimstellen vom Grad d, dann gilt

$$\operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[f] = \dot{\bigcup_{d|f}} \operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[=d],$$

und es wird sich herausstellen, dass die Äquivalenzrelation auf der Teilmenge $\operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[=1] = \operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1]$ durch die Operation einer Automorphismengruppe gegeben ist, nämlich $\operatorname{Aut}_M(\mathcal{F}_\pi(f)) = H_f^{S_f} = H_{1,f}$.

6.24 Bemerkung: Es sei $\mathcal{F}$ ein minimaler Frobeniuskörper innerhalb von $(M_\pi^f)^{1*}|M_\pi^f$ so, dass $\mathcal{F}|M_\pi^f$ reinverzweigt ist, das heißt, er erzeugt eine Mikroprimstelle vom Relativgrad 1. Dann muss $\mathcal{F}$ innerhalb $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f)$ nicht mehr minimal sein. Ist er weiter minimal, ergibt sich als Bild eine Mikroprimstelle vom Grad f. Gibt es einen minimalen Frobeniuskörper $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, dann verkleinert sich der Grad der Mikroprimstelle auf $d = \frac{f}{[\mathcal{F}:\mathcal{F}_0]}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{F}_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F}_\pi(f)^{1*} = (M_\pi^f)^{1*} \arrow[d, dash] \\
 & \mathcal{F}_\pi(f) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{F}_\pi(f)^d \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M_\pi^f \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (M^f)^{\mathrm{ab}} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & M = K(\pi) \arrow[r, dash] & M^d \arrow[r, dash] & M^f \arrow[r, dash] & K^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

6.25 Hilfssatz: Sei $\mathcal{F}_0$ ein den Körper $\mathcal{F}_\pi(f)$ enthaltender Frobeniuskörper innerhalb $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$ und $d := f_{\mathcal{F}_0|M}$. Sei $\sigma \in G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|M)$ so, dass auch $\sigma(\mathcal{F}_0) \supset \mathcal{F}_\pi(f)$ gilt. Dann führt σ den Körper $\mathcal{F}_0 \cap M_\pi^f = \mathcal{F}_\pi(f)^d$ in sich über.
Beweis: Nach Voraussetzung enthalten wegen $\sigma(\mathcal{F}_0 \cap M_\pi^f) = \sigma(\mathcal{F}_0) \cap \sigma(M_\pi^f) = \sigma(\mathcal{F}_0) \cap M_\pi^f$ sowohl $\sigma(\mathcal{F}_0 \cap M_\pi^f)$ als auch $\mathcal{F}_0 \cap M_\pi^f$ den Körper $\mathcal{F}_\pi(f)$. Damit sind die Körper $\sigma(\mathcal{F}_0 \cap M_\pi^f)$ und $\mathcal{F}_0 \cap M_\pi^f$ gleich, da sie in der unverzweigten Erweiterung $M_\pi^f|\mathcal{F}_\pi(f)$ vom selben Grad sind. □

6.26 Hilfssatz: Seien $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_0'$ Henselisierungen zweier Mikroprimstellen, die unter $\operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1] \twoheadrightarrow \operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[1]$ dasselbe Bild haben. Dann gilt $\mathcal{F}_0' = \sigma(\mathcal{F}_0)$ mit einem $\sigma \in G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$, das Fortsetzung eines Elementes aus $\operatorname{Aut}_M(\mathcal{F}_\pi(f))$ ist.
Beweis: Da $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_0'$ zu Mikroprimstellen vom Grad 1 gehören, sind sie über $\mathcal{F}_\pi(f)$, also auch über K reinverzweigt. Sie sind deshalb auch minimal unter den Frobeniuskörpern, die K enthalten. Da sie über K zur selben Mikroprimstelle gehören, gibt es ein $\sigma \in G(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)$ so, dass $\sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_0'$. Nun ist $\mathcal{F}_\pi(f)$ sowohl in $\mathcal{F}_0$ als auch in $\sigma(\mathcal{F}_0)$ enthalten, also führt σ nach Hilfssatz 6.25 den Körper $\mathcal{F}_0 \cap M_\pi^f = \mathcal{F}_\pi(f)$ in sich über. □

6.27 Bemerkung: Im Fall $d > 1$ ergibt sich die Frage: Wenn $\mathcal{F}_0$ eine Henselisierung bezüglich dem Teilkörper $\mathcal{F}_\pi(f)$ von M_π^f ist, das heißt minimal unter den Frobeniuskörpern, die $\mathcal{F}_\pi(f)$ enthalten, ist es dann auch eine Henselisierung bezüglich Grundkörper K?

6.28 Satz: Die surjektive Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1] \to \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[1]$ wird durch Ausfaktorisieren von $H_{1,f}$ zur Bijektion

$$H_{1,f} \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi(f)}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|\mathcal{F}_\pi(f))[1] \to \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[1].$$

Beweis: Die Gruppe $H_{1,f}$ operiert auf den Frobeniuskörpern durch Anwenden einer beliebigen Fortsetzung auf $\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}$. Nach den Hilfssätzen 6.26 und 6.4 (mit $U = S_f$) bestimmt diese Operation die Äquivalenzrelation, welche die Surjektion für die Teilmenge der Mikroprimstellen vom Grad 1 zur Bijektion macht. $\square$

6.29 Folgerung: Damit kann man im Diagramm von Bemerkung 6.15 oben rechts den Limes $\varprojlim_f \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi(f)^{1*}|K)_{[\pi]}[1] \leftrightarrow \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[1]$ einfügen, und die ganze Beschreibung direkt rechts herunter verfolgen.

6.5 Mikroprimstellen höheren Grades

In diesem Abschnitt wird der allgemeine Fall $\pi \in K^{\mathrm{nr}}$, das heißt, dass die Ausgangsmikroprimstelle $\mathfrak{p}_1$ höheren Grad hat, sowie der Fall der darüberliegenden Mikroprimstellen mit höherem Relativgrad behandelt, indem sie auf den Grad-1-Fall zurückgeführt werden.

6.30 Hilfssatz: Sei $d : G(E|K) \to \hat{\mathbb{Z}}$ lokal unverzweigt.

(i) Dann hat man die Bijektion

$$G(K^n|K) \setminus \mathrm{spec}(E|K^n) \leftrightarrow \mathrm{spec}(E|K),$$

und für $[\mathfrak{p}'] \mapsto \mathfrak{p}$ gilt $\deg(\mathfrak{p}) = \deg(\mathfrak{p}') \cdot \#[\mathfrak{p}']$.

(ii) Dabei gilt $\deg(\mathfrak{p}') = 1$ genau dann, wenn $\deg(\mathfrak{p})|n$. Damit hat man eine Bijektion

$$G(K^n|K) \setminus \mathrm{spec}(E|K^n)[1] \leftrightarrow \mathrm{spec}(E|K)[n],$$

wobei der Grad einer Mikroprimstelle auf der rechten Seite gleich der Länge des entsprechenden Galoisorbits links ist.

Beweis: (i) Die Bijektion ergibt sich nach Hilfssatz 1.17. Im hier angenommenen lokal unverzweigten Fall folgt aus Hilfssatz 1.43 die Beziehung

$$f_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} = f_{K^n|K} \cdot \frac{\deg(\mathfrak{p}')}{\deg(\mathfrak{p})} = n \cdot \frac{\deg(\mathfrak{p}')}{\deg(\mathfrak{p})}.$$

Andererseits ist wegen der fundamentalen Gleichung 1.44

$$n = [K^n : K] = \#[\mathfrak{p}'] \cdot f_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}},$$

denn $f_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}}$ ist unabhängig von der Wahl des $\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}$. Insgesamt folgt $f_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} = \#[\mathfrak{p}'] f_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} \frac{\deg(\mathfrak{p}')}{\deg(\mathfrak{p})}$, damit die Behauptung.

(ii) Für $\mathfrak{p}$ mit $\deg(\mathfrak{p})|n$, gilt $\deg(\mathfrak{p}')=1$, das heißt, $\deg(\mathfrak{p})=\#[\mathfrak{p}']$: Für eine Henselisierung $K_\mathfrak{p}$ gilt $f_{K_\mathfrak{p}|K} =: f_\pi|n$.

$$\begin{tikzcd}
 & K_\mathfrak{p} \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & E \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & K^{f_\pi} \arrow[r, dash] & K^n \arrow[r, dash] & K^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}$$

Die Erweiterung $K_\mathfrak{p}K^n|K^n$ ist reinverzweigt, deshalb erzeugt der Frobeniuskörper $K_\mathfrak{p}K^n$ eine Mikroprimstelle $\mathfrak{p}'$ vom Grad 1 in $\mathrm{spec}(E|K^n)$, diese ist ein Urbild von $\mathfrak{p}$. Damit haben alle Urbilder von $\mathfrak{p}$ den Grad 1. Nach (i) gilt $\deg(\mathfrak{p})=\#[\mathfrak{p}']$. Ist umgekehrt $\deg(\mathfrak{p}')=1$, gilt nach (i) $\deg(\mathfrak{p})=\#[\mathfrak{p}']$. Da $[\mathfrak{p}']$ ein $G(K^n|K)$-Orbit ist, muss $\#[\mathfrak{p}']$ ein Teiler von $n=\#G(K^n|K)$ sein. □

6.31 Folgerung: Im Fall $E=(K^n)^{2*}=K^{2*}$ führt die so erhaltene Bijektion

$$G(K^n|K)\setminus \mathrm{spec}(K^{2*}|K^n) \leftrightarrow \mathrm{spec}(K^{2*}|K)$$

auf die Bijektion

$$G(K^n|K)\setminus \mathrm{spec}((K^n)^{2*}|K^n)[1] \leftrightarrow \mathrm{spec}(K^{2*}|K)[n],$$

wobei der Grad einer Mikroprimstelle auf der rechten Seite gleich der Länge des entsprechenden Galoisorbits links ist.

6.32 Bemerkung: Es sei $\mathfrak{p}_1\in\mathrm{spec}(K^{1*}|K)$ weiterhin eine fest gewählte Mikroprimstelle, $\pi\in K^{\mathrm{nr}}$ ein zugehöriges Primelement, ferner $\mathcal{F}_\pi|K(\pi)$ eine Henselisierung von $\mathfrak{p}_1$. In der Faser $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}\subset\mathrm{spec}(K^{2*}|K)$ über $\mathfrak{p}_1$ ist der Grad $\deg(\mathfrak{P})$ aller Mikroprimstellen $\mathfrak{P}$ ein Vielfaches von $f_\pi=\deg(\mathfrak{p}_1)$, und $\frac{\deg(\mathfrak{P})}{f_\pi}$ ist der Relativgrad von $\mathfrak{P}$. Es sei nun n ein Vielfaches von f_π und $\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[\frac{n}{f_\pi}]$ die Teilmenge der Mikroprimstellen $\mathfrak{P}$, deren Relativgrad ein Teiler von $\frac{n}{f_\pi}$ ist, also $\deg(\mathfrak{P})|n$.
Unter der Abbildung $\mathrm{spec}(K^{1*}|K^n)\to\mathrm{spec}(K^{1*}|K)$ sei $\mathfrak{p}_1'$ ein fest gewähltes Urbild von $\mathfrak{p}_1$, das ebenfalls durch π repräsentiert wird. Es hat nach Folgerung 6.31 den Grad 1 und $\#[\mathfrak{p}_1']=\deg(\mathfrak{p}_1)=f_\pi$. Weiter sei $\mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}\subset\mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)$ das volle Urbild von $\mathfrak{p}_1'$.

6.33 Hilfssatz: Es ergibt sich eine natürliche Bijektion

$$G(K^n|K^{f_\pi})\setminus \mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}[1] \leftrightarrow \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[\frac{n}{f_\pi}].$$

Dabei entspricht die Länge des $G(K^n|K^{f_\pi})$-Orbits links dem Relativgrad rechts.

Beweis: Für $\mathfrak{p}\in\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[\frac{n}{f_\pi}]$ gilt $\deg(\mathfrak{p})|n$, also liegt darüber nach Folgerung 6.31 ein einziger $G(K^n|K)$-Orbit $[\mathfrak{P}]$ von Mikroprimstellen in $\mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)$ vom Grad 1. Unter $\mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)\to\mathrm{spec}(K^{1*}|K^n)$ wird $[\mathfrak{P}]$ auf den $G(K^n|K)$-Orbit $[\mathfrak{p}_1']$ abgebildet. Das $\mathfrak{p}_1'$ war jedoch fest gewählt und hat den Stabilisator $G(K^n|K^{f_\pi})$. Sind $\mathfrak{Q}_1,\mathfrak{Q}_2\in[\mathfrak{P}]\cap\mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}$, dann gilt $\mathfrak{Q}_2={}^\sigma\mathfrak{Q}_1$ mit einem $\sigma\in G(K^n|K)$, weil beide im selben $G(K^n|K)$-Orbit liegen. Andererseits liegen $\mathfrak{Q}_2$ und $\mathfrak{Q}_1$ beide über $\mathfrak{p}_1'$, und es gilt $\mathfrak{Q}_2\mapsto\mathfrak{p}_1'$ sowie ${}^\sigma\mathfrak{Q}_1\mapsto{}^\sigma\mathfrak{p}_1'$. Es folgt ${}^\sigma\mathfrak{p}_1'=\mathfrak{p}_1'$, also $\sigma\in G(K^n|K^{f_\pi})$. Damit ist $[\mathfrak{P}]\cap\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1'}$

ein $G(K^n|K^{f_\pi})$-Orbit, und es gilt $\#[\mathfrak{P}] = f_\pi \cdot \#([\mathfrak{P}] \cap \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1'})$, weil $f_\pi = \#[\mathfrak{p}_1']$. Da $[\mathfrak{P}] \subset \mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)$ auf $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$ abgebildet wird, gilt nach 6.31 $\#[\mathfrak{P}] = \deg(\mathfrak{p})$. Insgesamt gilt $\frac{\deg(\mathfrak{p}}{f_\pi} = \#([\mathfrak{P}] \cap \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1'})$, das heißt, die Länge des Orbits ist genau der Relativgrad. □

6.34 Bemerkung: Die Bijektion $G(K^n|K^{f_\pi}) \backslash \mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}[1] \leftrightarrow \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[\frac{n}{f_\pi}]$ ist durch $G(K^n|K) \setminus \mathrm{spec}(K^{2*}|K^n) \leftrightarrow \mathrm{spec}(K^{2*}|K)$ induziert, denn zu $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[\frac{n}{f_\pi}]$ wird nicht das volle Urbild, der $G(K^n|K)$-Orbit $[\mathfrak{P}]$, sondern nur $[\mathfrak{P}] \cap \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1'}$, also lediglich ein $G(K^n|K^{f_\pi})$-Orbit betrachtet. Man muss nun die Menge $\mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}[1]$ und die Aktion der Galoisgruppe $G(K^n|K^{f_\pi})$ darauf verstehen.

6.35 Definition: Zu $\mathfrak{p}_1'$ gehört die Henselisierung $\mathcal{F}_\pi K^n$:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\mathcal{F}_\pi K^n \arrow[r] \arrow[d] & K^{1*} \arrow[d] \\
K^n \arrow[r] & K^{1*}
\end{tikzcd}$$

Es sei

$$\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n} := K_\pi^{nf} \cap \mathcal{F}_\pi K^n :$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\mathcal{F}_\pi \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_\pi K^n \arrow[d] & \\
\mathcal{F}_\pi(\frac{nf}{f_\pi}) = \mathcal{F}_\pi\binom{nf}{f_\pi} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n} \arrow[r] \arrow[d] & K_\pi^{nf} \arrow[d] \\
M = K(\pi) = K^{f_\pi} \arrow[r] & K^n \arrow[r] & K^{nf} = M^{\frac{nf}{f_\pi}}
\end{tikzcd}$$

Da mit $K_\pi^{nf}|K^{nf}$ auch $\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}|K^n$ APF ist, kann man den Normenkörper

$$Y\tbinom{nf}{n} := \mathbb{X}_K(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n})$$

bilden, und einem Primelement $\hat{\pi}$ daraus kann eine eindeutige Lubin-Tate-Potenzreihe $l(X) \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf})$ zugeordnet werden.

6.36 Hilfssatz: Die Operation der Galoisgruppe $G(K^n|K^{f_\pi})$ durch Anwendung auf die Koeffizienten der Potenzreihen ist verträglich mit den Übergangsabbildungen $V_{nf|nf'}$: $\mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf'}) \to \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf})$.

Beweis: Sei $l' \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf'})$ mit verträglichem Erzeuger $(w_i')_i$ und $l := V_{nf|nf'}(l')$, also mit verträglichem Erzeuger $(w_i)_i := N((w_i')_i)$, ferner $\sigma \in G(K^n|K^{f_\pi})$ und $\hat{\sigma}$ eine Fortsetzung auf $\mathcal{F}_\pi K^n$, die $\mathcal{F}_\pi$ in sich überführt, dann ist mit $l^{(i)}(w_i) = 0$ auch ${}^{\hat{\sigma}}l^{(i)}(\hat{\sigma}(w_i)) = \hat{\sigma}l^{(i)}\hat{\sigma}^{-1}(\hat{\sigma}(w_i)) = \hat{\sigma}(l^{(i)}(w_i)) = 0$ und mit $l^{(i-1)}(w_i) \neq 0$ auch ${}^{\hat{\sigma}}l^{(i-1)}(\hat{\sigma}(w_i)) \neq 0$, sowie mit $l(w_i) = w_{i-1}$ auch ${}^{\hat{\sigma}}l(\hat{\sigma}(w_i)) = \hat{\sigma}l\hat{\sigma}^{-1}(\hat{\sigma}(w_i)) = \hat{\sigma}(l(w_i) = \hat{\sigma}(w_{i-1})$, also $(\hat{\sigma}(w_i))_i$ ein verträglicher Erzeuger von ${}^{\hat{\sigma}}l = {}^{\sigma}l$. Entsprechend $(\hat{\sigma}(w_i'))_i$ für ${}^{\sigma}l'$. Damit ist $V_{nf|nf'}({}^{\sigma}l')$ die zu $N((\hat{\sigma}(w_i')_i) = (\hat{\sigma}(w_i))_i$ gehörige Lubin-Tate-Potenzreihe, das ist ${}^{\sigma}l = {}^{\sigma}V_{nf|nf'}(l')$. □

<u>6.37 Satz:</u> Durch Bildung des projektiven Limes bezüglich der Verträglichkeitsabbildungen $V_{nf|nf'} : \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf'}) \to \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf})$ für $f|f'$ ergibt sich

$$\mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}[1] \leftrightarrow \varprojlim_f \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf}).$$

Beweis: Da $\pi \in K^n$ ist, beschreibt Satz 6.18 die Menge $\mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}[1]$ in folgenden Schritten:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}[1] \\
\leftrightarrow \quad & \qquad \text{(Da } K^n\mathcal{F}_\pi|K^n \text{ reinverzweigt ist, bleibt der Grad unverändert.)} \\
& \mathrm{spec}_{K^n\mathcal{F}_\pi}(K^{2*})|K^n\mathcal{F}_\pi)[1] \\
\leftrightarrow \quad & \qquad \text{(Es beginnt die Beschreibung für Mikroprimstellen vom Grad 1.)} \\
& \varprojlim_f \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}^{1*}|\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n})[1] \\
\leftrightarrow \quad & \qquad \text{(Das Ausfaktorisieren ist nur im Limes möglich, dagegen} \\
& \qquad \text{erfolgen die weiteren Schritte komponentenweise.)} \\
& \varprojlim_f \mathrm{Aut}_{K^n}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}) \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}^{1*}|\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n})[1] \\
\leftrightarrow \quad & \qquad \text{(Unveränderter Grad bei Übergang zum Normenkörper.)} \\
& \varprojlim_f \mathrm{Aut}_{K^n}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}) \setminus \mathrm{spec}_{Y_\pi\binom{nf}{n}}(Y_\pi\tbinom{nf}{n}^{1*}|Y_\pi\tbinom{nf}{n})[1] \\
\leftrightarrow \quad & \qquad \text{(Mikroprimstellen vom Grad 1 entsprechen} \\
& \qquad \text{Primelementen des Normenkörpers.)} \\
& \varprojlim_f \mathrm{Aut}_{K^n}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}) \setminus \mathscr{P}(Y_\pi\tbinom{nf}{n}) \\
\leftrightarrow \quad & \qquad \text{(Fastabelsche Variante des Mehlig-Zink-Satzes.)} \\
& \varprojlim_{f, V_{nf|nf'}} \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf})
\end{aligned}$$

□

<u>6.38 Hilfssatz:</u> Es gilt $G(K^n|K^{f_\pi}) \setminus \varprojlim_f \mathrm{Aut}_{K^n}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}) \setminus \mathscr{P}(Y_\pi\tbinom{nf}{n}) \leftrightarrow \varprojlim_f (G(K^n|K^{f_\pi}) \setminus \mathrm{Aut}_{K^n}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}) \setminus \mathscr{P}(Y_\pi\tbinom{nf}{n})))$.

Beweis: Es sei $E_f := \mathrm{Aut}_{K^n}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}) \setminus \mathscr{P}(Y_\pi\tbinom{nf}{n})$ und $G_f := G(K^n|K^{f_\pi})$. Die Mengen E_f sind kompakte topologische Räume und bilden ein projektives System $(E_f, N_{f|f'})$ mit den stetigen und surjektiven Ausdünnungsabbildungen $N_{f|f'} : E_{f'} \to E_f$ wie in Bemerkung 6.15. Ebenso sind die Gruppen G_f kompakt und bilden ein projektives System $(G_f, r_{f|f'})$ mit der Identität $r_{f|f'} : G_{f'} \to G_f$. Die Gruppen G_f operieren stetig und äquivariant auf den Mengen nach Hilfssatz 6.36. Also ist Hilfssatz 6.16 anwendbar, und man hat die Bijektion

$$\varprojlim_f G(K^n|K^{f_\pi}) \setminus \varprojlim_f \mathrm{Aut}_{K^n}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}) \setminus \mathscr{P}(Y_\pi\tbinom{nf}{n}) \leftrightarrow \varprojlim_f (G(K^n|K^{f_\pi}) \setminus \mathrm{Aut}_{K^n}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}) \setminus \mathscr{P}(Y_\pi\tbinom{nf}{n}))).$$

Es gilt aber $G(K^n|K^{f_\pi}) = \varprojlim_f G(K^n|K^{f_\pi})$, wegen der Identitäten als Übergangsabbildungen, damit die Behauptung. □

6.39 Hauptsatz: Hilfssatz 6.33 und Satz 6.37 ergeben zusammen die Bijektion

$$\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[\frac{n}{f_\pi}] \leftrightarrow G(K^n|K^{f_\pi}) \setminus \varprojlim_f \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(K^n, \pi, q^{nf}).$$

Mit $M = K(\pi) = K^{f_\pi}$ und $m := \frac{n}{f_\pi}$ bedeutet das

$$\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m] \leftrightarrow G(M^m|M) \setminus \varprojlim_f \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m, \pi, q^{f_\pi mf}).$$

□

6.40 Bemerkung: Im Spezialfall $n = f_\pi = 1$ erhält man Satz 6.18 zurück.

6.41 Definition: Es sei $\hat{\mathfrak{F}}(K(\pi)^m, \pi) := \varprojlim_f \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m, \pi, q^{f_\pi mf})$.

6.6 Verbindung zu den Mehlig-Zink-Subquotienten

In diesem Abschnitt wird erneut die Verbindung zu den Mehlig-Zink-Subquotienten untersucht. Im Ergebnis wird deren Rolle bei der Beschreibung der betrachteten Faser ganz deutlich.

6.42 Hilfssatz: Man hat die Bijektion

$$G(M^m|M) \setminus (\mathrm{Aut}_{M^m}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n})) \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}^{1*}|\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n})[1]) \leftrightarrow \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}^{1*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m].$$

Beweis: Zunächst ergibt die Anwendung des Satzes 6.28 auf die Situation

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_\pi K^n \arrow[d, dash] & \\
\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K_\pi^{nf} = M_\pi^{mf} \arrow[d, dash] \\
K^n = M^m \arrow[r, dash] & K^{nf} = M^{mf}
\end{tikzcd}$$

die Bijektion

$$\mathrm{Aut}_{M^m}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}) \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}^{1*}|\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n})[1] \leftrightarrow \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}^{1*}|M^m)_{\mathfrak{p}_1'}[1]. \tag{6.2}$$

Die Erweiterung $\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}^{1*} = \mathcal{F}_\pi(mf)^{1*}$ ist APF über K. Die Teilmenge $\mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}^{1*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}[1]$ des Bildes der Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}}(\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}^{1*}|\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}) \to \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}^{1*}|K^n)$ und die Teilmenge $\mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}^{1*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[\frac{n}{f_\pi}]$ des Bildes der Abbildung $\mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}}(\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}^{1*}|\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}) \to \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi\binom{nf}{n}^{1*}|K)$ enthalten nach Hilfssatz 4.20 nur abgeschlossene Mikroklassen. Also ergibt die Bijektion

$$G(M^m|M) \setminus \mathrm{spec}(K^{2*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}[1] \leftrightarrow \mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m]$$

aus Hilfssatz 6.33 durch Übergang zum Quotienten

$$G(M^m|M) \setminus \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}^{1*}|K^n)_{\mathfrak{p}_1'}[1] \leftrightarrow \mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{nf}{n}^{1*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m] \tag{6.3}$$

eine Bijektion von Mikroprimstellen. Die Bijektion 6.2 modulo $G(M^m|M)$-Operation und die Bijektion 6.3 ergeben zusammen die Behauptung. $\square$

6.43 Satz: Die Abbildung $V_{f_\pi mf|f_\pi mf'}$ ist surjektiv.

Beweis: Nach den Beschreibungsschritten aus Satz 6.37 und Hilfssatz 6.42 hat man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi mf'}{f_\pi m}^{1*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & G(M^m|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m,\pi,q^{f_\pi mf'}) \arrow[d, "\bar{V}_{f_\pi mf|f_\pi mf'}"] \\
\mathrm{spec}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi mf}{f_\pi m}^{1*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m] \arrow[r, leftrightarrow] & G(M^m|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m,\pi,q^{f_\pi mf})
\end{tikzcd}$$

Wegen der Surjektivität der die Projektion $G(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi mf'}{f_\pi m}^{1*}|K) \to G(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi mf}{f_\pi m}^{1*}|K)$, gilt dies auch $\mathrm{frob}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi mf'}{f_\pi m}^{1*}|K) \to \mathrm{frob}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi mf}{f_\pi m}^{1*}|K)$, denn der Wert von d_K bleibt bei dieser Einschränkung unverändert. Damit ist die linke Vertikale surjektiv, was sich auf die Abbildung $\bar{V}_{f_\pi mf|f_\pi mf'}$ auf den $G(M^m|M)$-Orbits überträgt, sei kurz $\Gamma := G(M^m|M)$. Der Orbit $\Gamma \cdot l$ eines beliebigen Elementes $l \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m,\pi,q^{f_\pi mf})$ wird also immer von einem Orbit $\Gamma \cdot l'$ mit einem $l' \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m,\pi,q^{f_\pi mf'})$ erreicht. Also gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ so, dass $V_{f_\pi mf|f_\pi mf'}(l') = \gamma \cdot l$. Wegen Hilfssatz 6.36 gilt $l = \gamma^{-1} \cdot V_{f_\pi mf|f_\pi mf'}(l') = V_{f_\pi mf|f_\pi mf'}(\gamma^{-1} \cdot l')$, damit ist l im Bild von $V_{f_\pi mf|f_\pi mf'}$. $\square$

6.44 Hilfssatz: Die Projektion auf die erste Komponente des projektiven Limes induziert eine Abbildung auf den Mehlig-Zink-Subquotienten $\mathbb{S}_m$.
Beweis: Nach Hilfssatz 6.33 und Satz 6.37 ist

$$\begin{aligned}
&\mathrm{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m] \\
\leftrightarrow\ & G(M^m|M) \setminus \mathrm{spec}(K^{2*}|M^m)_{\mathfrak{p}_1'}[1] \\
\leftrightarrow\ & G(M^m|M) \setminus \varprojlim_f \mathrm{Aut}_{M^m}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi mf}{f_\pi m}) \setminus \mathrm{spec}_{\mathcal{F}_\pi\binom{f_\pi mf}{f_\pi m}}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi mf}{f_\pi m}^{1*}|\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi mf}{f_\pi m})[1] \\
\leftrightarrow\ & G(M^m|M) \setminus \varprojlim_{f, V_{f_\pi mf|f_\pi mf'}} \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m,\pi,q^{f_\pi mf})
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Wegen $\mathcal{F}_\pi\tbinom{n}{n} = M_\pi^m$ und $\mathrm{Aut}_{M^m}(M_\pi^m) = G(M_\pi^m|M^m)$ ergibt die Projektion auf die erste Komponente der dritten Zeile die Menge $G(M_\pi^m|M) \setminus \mathrm{spec}_{M_\pi^m}((M_\pi^m)^{1*}|M_\pi^m)[1]$. Diese entspricht nach dem ersten Identifizierungschritt 3.72 dem Mehlig-Zink-Subquotienten

$\mathbb{S}_m = \operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(m)^{1*}|K)_{[\pi]}[m]$.
Die Projektion auf die f'-te Komponente der dritten Zeile von (6.4) induziert

$$G(M^m|M) \setminus \varprojlim_{f} \mathrm{Aut}_{M^m}(\mathcal{F}_\pi(\tbinom{f_\pi m f}{f_\pi m})) \setminus \operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(\tbinom{f_\pi m f}{f_\pi m})}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi m f}{f_\pi m}^{1*}|\mathcal{F}_\pi(\tbinom{f_\pi m f}{f_\pi m}))[1]$$
$$\xrightarrow{Pr_{f'}} G(M^m|M) \setminus \mathrm{Aut}_{M^m}(\mathcal{F}_\pi(\tbinom{f_\pi m f'}{f_\pi m})) \setminus \operatorname{spec}_{\mathcal{F}_\pi(\tbinom{f_\pi m f'}{f_\pi m})}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi m f'}{f_\pi m}^{1*}|\mathcal{F}_\pi(\tbinom{f_\pi m f'}{f_\pi m}))[1].$$

Unter Berücksichtigung von Hilfssatz 6.42 und Satz 6.43 hat man für ein beliebiges $f' \geq 1$ folgendes Diagramm mit surjektiven Vertikalen:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\bar{Pr}_{f'}"] & G(M^m|M) \setminus \varprojlim_{f} \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m, \pi, q^{f_\pi m f}) \arrow[d, "\bar{Pr}_{f'}"] \\
\operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi m f'}{f_\pi m}^{1*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & G(M^m|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m, \pi, q^{f_\pi m f'}) \arrow[d, "\bar{V}_{f_\pi m|f_\pi m f'}"] \\
\operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(m)^{1*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m] \arrow[r, leftrightarrow] & G(M^m|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m, \pi, q^{f_\pi m})
\end{tikzcd}$$

In der letzten Zeile wurde $\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi m}{f_\pi m}^{1*} = \mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi m}{f_\pi}^{1*} = \mathcal{F}_\pi(\frac{f_\pi m}{f_\pi})^{1*} = \mathcal{F}_\pi(m)^{1*}$ angewandt. Sie ist Satz 3.82, das Theorem 2 aus dem Artikel [MZ05] von Mehlig und Zink. $\square$

6.45 Folgerung: Beim rechten Limes des Hilfssatzes 6.38 ist die erste Komponente der Mehlig-Zink-Subquotient $\mathbb{S}_m$.

6.46 Satz: Bei der Bijektion

$$\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m] \leftrightarrow G(M^m|M) \setminus \varprojlim_{f} \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m, \pi, q^{f_\pi m f})$$

des Hauptsatzes 6.39 entspricht der Relativgrad einer Mikroprimstelle links der Länge des Galoisorbits rechts.
Beweis: Man benutzt das Diagramm aus Hilfsatz 6.44. Da der Relativgrad endlich ist und durch die Verträglichkeitsabbildungen nur kleiner werden kann, ist er für genügend großes f' (unter Beachtung von $\mathcal{F}_\pi\tbinom{f_\pi m f'}{f_\pi m}^{1*} = \mathcal{F}_\pi(mf')^{1*}$) bereits auf beiden Seiten von

$$\operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(mf')^{1*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m] \leftrightarrow G(M^m|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m, \pi, q^{f_\pi m f'})$$

erreicht. Diese Abbildung ist genau die Einschränkung von

$$\mathbb{S}_{mf'} = \operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(mf')^{1*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[mf'] \leftrightarrow G(M^{mf'}|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^{mf'}, \pi, q^{f_\pi m f'}) \tag{6.5}$$

auf die Teilmenge $\operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(mf')^{1*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m]$: Die Bijektion 6.5 erfüllt nach Satz 3.82 bereits die Behauptung. Für eine Mikroprimstelle, deren Relativgrad m_1 ein Teiler von m ist, hat der Galoisorbit rechts die Länge m_1. Also bleiben die Koeffizienten der zugehörigen normischen Lubin-Tate-Potenzreihen bei Anwendung der Untergruppe $G(M^{mf'}|M^{m_1})$ unverändert. Damit sind sie in $M^{m_1} \subseteq M^m$, und die Operation von $G(M^{mf'}|M)$ entspricht der von $G(M^m|M)$. $\square$

6.47 Definition: Im Hinblick auf die Sätze 6.28 und 6.46 setzt man

$$\mathbb{S}_{m|mf} := \operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(mf)^{1*})|K)_{[\pi]}[m],$$

also $\mathbb{S}_{m|m} = \mathbb{S}_m$.

6.48 Bemerkung: Damit hat man die folgende Übersicht

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}\\=\mathbb{S}_{\infty|\infty}\end{array} & & \\
\begin{array}{c}\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[mf]\\=\mathbb{S}_{mf|\infty}\end{array} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & \begin{array}{c}\operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(mf)^{1*}|K)_{[\pi]}[mf]\\=\mathbb{S}_{mf|mf}=\mathbb{S}_{mf}\end{array} \arrow[r, leftrightarrow] & G(M^{mf}|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^{mf},\pi,q^{f_\pi mf}) \\
\begin{array}{c}\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[m]\\=\mathbb{S}_{m|\infty}\end{array} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads] & \begin{array}{c}\operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(mf)^{1*}|K)_{[\pi]}[m]\\=\mathbb{S}_{m|mf}\end{array} \arrow[u, hook] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, two heads] & G(M^{m}|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^{m},\pi,q^{f_\pi mf}) \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "V_{f_\pi m|f_\pi mf}"] \\
& \begin{array}{c}\operatorname{spec}(\mathcal{F}_\pi(m)^{1*}|K)_{[\pi]}[m]\\=\mathbb{S}_{m|m}=\mathbb{S}_{m}\end{array} \arrow[r, leftrightarrow] & G(M^{m}|M) \setminus \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^{m},\pi,q^{f_\pi m})
\end{tikzcd}$$

und sieht, wie die Mehlig-Zink-Subquotienten zusammenhängen: Der Subquotient $\mathbb{S}_{mf}$ enthält die Teilmenge $\mathbb{S}_{m|mf}$, von dem wiederum $\mathbb{S}_m$ ein Quotient ist.

6.7 Ein Modell der Faser

In diesem Abschnitt sollen die Modelle für die Teilmengen $\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m]$ von $\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}$ zusammengesetzt werden. Die Vereinigung der Teilmengen $\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{\mathfrak{p}_1}[m]$ für alle m entspricht einem direkten Limes auf der Seite der Mengen $G(M^m|M) \setminus \varinjlim_{f, V_{f_\pi mf|f_\pi mf'}} \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^m, \pi, q^{f_\pi mf})$.

6.49 Definition: Für $m_1|m_2$ wird zunächst folgende Abbildung

$$\hat{\mathfrak{F}}(M^{m_1}, \pi) \to \hat{\mathfrak{F}}(M^{m_2}, \pi)$$

betrachtet. Alle Vielfachen von m_2 sind auch Vielfache von m_1, daher ist $\{l_f^{(m_1)}\}_f \mapsto \{l_f^{(m_2)}\}_f$ einfach eine Ausdünnung auf das kofinale Teilsystem der Vielfachen von $\frac{m_2}{m_1}$: Sei

$$f' := \frac{fm_2}{m_1},$$

das heißt, $f_\pi m_1 f' = f_\pi m_2 f$, und

$$l_f^{(m_2)} := l_{f'}^{(m_1)} \in \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^{m_1}, \pi, q^{f_\pi m_1 f'}) \subseteq \mathfrak{F}^{\mathrm{norm}}(M^{m_2}, \pi, q^{f_\pi m_2 f}).$$

6.50 Hilfssatz: Diese Abbildung induziert auf den Galoisorbits eine Abbildung

$$G(M^{m_1}|M) \setminus \hat{\mathfrak{F}}(M^{m_1}, \pi) \to G(M^{m_2}|M) \setminus \hat{\mathfrak{F}}(M^{m_2}, \pi). \tag{6.6}$$

Beweis: Die Potenzreihen der links kommenden Orbits haben Koeffizienten in M^{m_1}, also operiert $G(M^{m_2}|M^{m_1}$ trivial, und der zugehörige $G(M^{m_2}|M)$-Orbit ist ein $G(M^{m_1}|M)$-Orbit. □

6.51 Satz: Die Bildung des direkten Limes bezüglich der Abbildungen (6.6) führt auf eine Beschreibung der betrachteten Faser:

$$\operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]} = \bigcup_m \operatorname{spec}(K^{2*}|K)_{[\pi]}[m] = \varinjlim_m G(M^m|M) \setminus \hat{\mathfrak{F}}(M^m, \pi).$$

Ein Element des direkten Limes ist eine Äquivalenzklasse von Abfolgen normischer Lubin-Tate-Potenzreihen. Da unter der Verträglichkeitsabbildung der Koeffizientenkörper einer Potenzreihe nicht größer wird, bestimmt innerhalb einer solchen Äquivalenzklasse jeder Abfolge denselben Körper K' der Koeffizienten durch Adjunktion der Koeffizienten aller beteiligten Lubin-Tate-Potenzreihen. Damit ist die Länge der Galoisorbits der Vertreter immer gleich, und zwar $[K' : K]$. Gleichzeitig ist das der Grad der entsprechenden Mikroprimstelle links nach Hauptsatz 6.39.

Sachverzeichnis

K-Fall, 27
K_0-Fall, 27

APF, 24
arithmetisch proendlich, 24

Basispunktansatz, 52

Colemanpotenzreihe, 65
Colemansche Norm, 65

Eindeutigkeitsprinzip, 70
Erzeuger des Tatemoduls, 29
  verträglicher, 62

formale Gruppe, 26
formaler Modul, 26
Frobeniuselement, 1
  maximales, 9
  relatives, 1
Frobeniuselemente
  äquivalente, 3
Frobeniuskörper, 2
  äquivalente, 3
  minimaler, 9
  relativer, 2

Grad einer Mikroprimstelle, 10

Henselisierung, 7

lokal unverzweigt, 8
Lubin-Tate-Modul, 26
Lubin-Tate-Polynom, 26
Lubin-Tate-Potenzreihe, 26
  normische, 29
Lubin-Tate-Potenzreihen
  verträgliche normische, 44, 81

Markierung, 19
Mehlig-Zink-Subquotient, 34, 85, 92, 93
Mikroklasse, 3
  diskrete, 4
Mikroprimstelle, 3
  diskrete, 4
  Grad einer, 10
  stark diskrete, 4

Normenkörper, 25
  Bewertung, 24
normische Lubin-Tate-Potenzreihe, 29

primitiver Teilungspunkt, 29

Relativgrad von Mikroprimstellen, 11, 32

Tatemodul, 29
  Erzeuger, 29
  verträglicher Erzeuger, 62
Teilungskörper, 29
Teilungspunkt, 29
  primitiver, 29
Trägheitsgruppe, 5

universelle Norm
  die, 18

verträgliche normische Lubin-Tate-Potenzreihen, 44, 81
verträgliche normische Sequenzen, 44
Verträglichkeitsabbildung für normische Lubin-Tate-Potenzreihen, 81

Zerlegungsgruppe, 5

Literaturverzeichnis

[Bou90] Bourbaki, Nicolas: *Topologie générale III*. Masson, 1990

[Col79] Coleman, Robert F.: Division Values in Local Fields. In: *Inventiones mathematicae* 53 (1979), S. 91–116

[FV93] Fesenko, Ivan B. ; Vostokov, Sergei V.: *Local Fields and Their Extensions*. Translations of Mathematical Monographs, American Mathmatical Society, Providence, Rhode Island, 1993

[Gey69] Geyer, Wulf-Dieter: Unendliche algebraische Zahlkörper. In: *Journal of Number Theory* 1 (1969), S. 346–374

[Iwa86] Iwasawa, Kenkichi: *Local Class Field Theory*. Oxford University Press, New York, 1986

[KS96] Koch, Helmut ; Shalit, Ehud de: Metabelian local class field theory. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 478 (1996), S. 85–106

[Lau07] Laubie, François: Une théorie non abélienne du corps de classes local. In: *Compositio Mathematica* 143 (2007), S. 339–362

[Meh03] Mehlig, Julia: *Invarianten von Mikroprimstellen für p-adische Körper*, Humboldt-Universität zu Berlin, Dissertation, 2003

[MZ05] Mehlig, Julia ; Zink, Ernst-Wilhelm: Invariants of Microprimes for p-adic fields. In: *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society (Russisch)* 11 (2005), S. 167–213

[Neu92] Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1992

[Neu94] Neukirch, Jürgen: Micro primes. In: *Mathematische Annalen* 298 (1994), S. 629–666

[Ser68] Serre, Jean-Pierre: *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968

[Sha85] Shalit, Ehud de: Relative Lubin-Tate Groups. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 95 (1985), Nr. 1, S. 1–4

[Sti02] Stichtenoth, Rahel: *Metabelsche lokale Klassenkörpertheorie*, Humboldt-Universität zu Berlin, Diplomarbeit, 2002

[Wil98] Wilson, John S.: *Profinite Groups*. Oxford University Press, 1998

[Win83] WINTENBERGER, Jean-Pierre: Les corps de normes de certaines extensions infinies de corps locaux; Applications. In: *Annales scientifiques de l'école normale supérieure* 4e série, tome 16 (1983), S. 59–89

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, am 13. Juli 2010 Ernst Ludwig Wirl